# D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes : une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien.

Sonia Ben Nejma

*Université Paris- Diderot Paris7*

*Université de Tunis*

**ECOLE DOCTORALE : Didactique des disciplines**

**Thèse en co-tutelle**

Pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS- DIDEROT PARIS 7 ET DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TUNIS**

Présentée par

**Sonia BEN NEJMA**

**SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

# D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes - Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien

**Thèse co-dirigée par Michèle ARTIGUE & Faouzi CHAABANE**

**Soutenue publiquement le 27 Juin 2009**

| | |
|---|---|
| **Directeurs de thèse** | |
| Michèle ARTIGUE | Professeur, Université Paris Diderot - Paris7 |
| Faouzi CHAABANE | Professeur, Université 7 Novembre, Carthage |
| **Rapporteurs** | |
| Teresa ASSUDE | Professeur, Université, Université de Provence |
| Belhassen DAHMEN | Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis |
| **Examinateurs** | |
| Lalina COULANGE, | Maîtres de conférences, Université Bordeaux 4 |
| Karim BOULABIAR | Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis |
| **Membre** | |
| Brigitte GRUGEON | Professeur, Université de Picardie Jules Verne |

*Université Paris- Diderot*
*Paris7*

*Université de Tunis*

**ECOLE DOCTORALE : Didactique des disciplines**

**Thèse en co-tutelle**

Pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS- DIDEROT PARIS 7**
**ET DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TUNIS**

Présentée par

**Sonia BEN NEJMA**

**SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

# D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes - Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien

**Thèse co-dirigée par Michèle ARTIGUE**
**& Faouzi CHAABANE**

**Soutenue publiquement le 27 Juin 2009**

| | |
|---|---|
| **Directeurs de thèse** | |
| Michèle ARTIGUE | Professeur, Université Paris Diderot - Paris7 |
| Faouzi CHAABANE | Professeur, Université 7 Novembre, Carthage |
| **Rapporteurs** | |
| Teresa ASSUDE | Professeur, Université, Université de Provence |
| Belhassen DAHMEN | Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis |
| **Examinateurs** | |
| Lalina COULANGE, | Maîtres de conférences, Université Bordeaux 4 |
| Karim BOULABIAR | Professeur, Université Tunis El Manar, Tunis |
| **Membre** | |
| Brigitte GRUGEON | Professeur, Université de Picardie Jules Verne |

*A mes filles adorées Sarra et Siwar*
*Pour leur bonne humeur et leur joie de vivre.*

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, ici toutes les personnes qui, à divers titres, m'ont soutenue et encouragée dans la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier Lalina COULANGE d'avoir accepté de co-diriger officieusement ce travail avec beaucoup de disponibilité et de générosité poursuivant ainsi l'aventure commencée en DEA, elle m'a donné le goût de la recherche en didactique des mathématiques. Je lui suis reconnaissante pour ses qualités de chercheur, sa disponibilité et ses qualités humaines. Elle m'a fait bénéficier de son expérience et n'a cessé de me prodiguer idées conseils et aides. Même dans des circonstances professionnelles et familiales difficiles ses encouragements m'ont permis de réaliser ce travail dans une ambiance amicale et studieuse que je ne suis pas prête d'oublier.

Je suis également très reconnaissante à Michèle Artigue, qui a accepté de co-diriger ce travail avec beaucoup d'attention et de rigueur. Je lui exprime ma profonde gratitude pour ses précieux conseils et ses grandes compétences de chercheur qui m'ont fait entrevoir divers chemins possibles dans la réalisation et la poursuite de ce travail. Je la remercie pour son aide et ses encouragements.

Je remercie Faouzi CHAABANE , pour avoir accepté de co-diriger cette thèse, pour ses attentions , les services qu'il m'a rendu et sa bonne volonté de mathématicien à s'investir dans les recherches en didactique des mathématiques..

Je remercie Teresa ASSUDE et Belhassan DAHMAN de s'être rendus disponibles pour être rapporteurs de ma thèse, pour leurs commentaires sur ce travail et leurs conseils qui ouvrent des perspectives possibles dans la poursuite de cette recherche.

Je suis reconnaissante à Brigitte Grugeon qui a encadré mon travail de DEA pour m'avoir fait découvrir l'univers de la recherche en didactique des mathématiques pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa grande générosité.

Je suis reconnaissante à Mehdi ABDELJAOUAD pour m'avoir constamment encouragé dans ce domaine de la recherche en didactique des mathématiques, pour ses initiatives, et ses qualités humaines précieuses.

*Je remercie les membres de l'équipe DIDIREM qui m'ont toujours bien accueilli durant mes séjours de recherche, Nicole, Annie, Martine, Nadine, Sébastien, Romain de l'IREM, qui ont contribué par leur hospitalité et leur sympathie à la réussite de ce travail.*

*Je remercie également mes proches en particulier ma tante Zohra et tous les thésards du laboratoire avec lesquels j'ai passé des moments agréables, Avénilde, Caroline, Elizabeth Ridha...*

*Mes remerciements s'adressent aussi à l'institut supérieur de l'éducation et de la formation continue de Tunis, en particulier à Monsieur Kameleddine GAHA et à Nabila ainsi qu'à la faculté des sciences de Bizerte pour m'avoir soutenu lors de mes stages de recherche.*

*Mes remerciements sincères vont aussi à toutes les collègues qui ont bien voulu m'ouvrir les portes de leurs classes et de leur travail ainsi qu'aux directeurs des établissements scolaires.*

*J'exprime ma profonde gratitude à mon mari Sofiene qui a partagé avec moi tous les moments de joie de peine et qui, par sa bonté et sa patience a su m'insuffler l'énergie et le courage nécessaires pour accomplir avec succès mon travail de thèse.*

*Enfin, je suis reconnaissante à mes parents qui ont toujours été à mes côtés, mon père Moncef qui m'a prodigué l'envi d'étudier et de persévérer dans ce que je fais, par son amour et ses encouragements, ma mère Zineb pour son affection, sa générosité et sa disponibilité dans les moments les plus difficiles.*

# Sommaire

# Introduction et problématique

*Dans un monde qui bouge, il vaut mieux penser le changement que de changer le pansement.*

Francis Blanche

## I. Introduction

Nous vivons aujourd'hui, plus que jamais à l'heure, des grandes réformes scolaires basées sur l'évolution des paradigmes d'apprentissages. Des nouveaux moyens ou méthodes d'enseignement des mathématiques ont été introduites dans les pratiques scolaires tunisiennes. Les orientations officielles prescrivent le développement des programmes avec de nouveaux cadres de référence théoriques et épistémologiques : compétences plutôt qu'objectifs, socioconstructivisme plutôt que comportementalisme, traitement des situations de vie quotidienne plutôt que contenus disciplinaires décontextualisés ,et accent mis sur la personne apprenante plutôt que sur celle qui enseigne. Les attitudes des enseignants et leurs pratiques en classe ainsi que les performances des élèves travaillant avec ces nouveaux moyens sont autant d'aspects d'investigation. Il s'agit de réfléchir sur le rôle des enseignants, principaux acteurs des changements attendus, et sur le sens à donner à leurs pratiques professionnelles dans un contexte de réforme.

Le mouvement actuel de la réforme tunisienne paraît exiger des «changements simultanés massifs et multiformes » qui remettent profondément en question certains aspects des pratiques enseignantes (qui doivent par exemple laisser davantage de place à l'activité de l'élève, problématiser davantage les savoirs en jeu). Comment ne pas être déstabilisé lorsqu'on a été formé et qu'on a œuvré dans un contexte de programmes d'études monodisciplinaires construits par objectifs ? On peut comprendre que les enseignants partagent une mission commune et soient centrés sur la réussite des élèves mais les changements de rôle attendus ne peuvent sans doute se faire du jour au lendemain, « *la réforme prend ses formes et ses couleurs à mesure que les actions en dessinent les contours* ». (Charlot in Maury & Caillot, 2003)

Le processus dynamique et complexe des réformes curriculaires est au cœur de préoccupations de commissions nationales et internationales sur l'éducation.

Dans le contexte de notre recherche, nous nous proposons donc de traiter un volet resté encore peu exploré, à savoir, l'adaptation des enseignants à un changement curriculaire. Ainsi, il nous a semblé intéressant d'observer de près les bouleversements induits par un changement de réformes sur les pratiques de professeurs expérimentés et de mieux comprendre leur évolution à l'échelle d'une année ou deux. Notons que les analyses de pratiques effectives sont utilisées depuis une quinzaine d'année en France et se sont intéressés entre autres à la formation des enseignants. Par contre dans le contexte tunisien, bien que certains travaux se soient penchés sur les conceptions ou les représentations des enseignants, il n'y a quasiment pas eu de travaux en didactique des mathématiques portant sur l'étude des pratiques effectives des enseignants.

« En Tunisie, la majorité des travaux de recherche en didactique est en lien direct avec des questions touchant à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, et ne portent pas directement ni sur les pratiques enseignantes, ni sur les pratiques de formation des enseignants. Toutefois, il existe un certain nombre de recherches - actions effectuées régulièrement par des groupes d'inspecteurs de mathématiques et d'enseignants. » (Smida 2007, p.224)

Nous commençons par préciser le cadre institutionnel auquel nous faisons référence avant de présenter l'évolution de notre réflexion qui a abouti au sujet actuel de la thèse.

## I.1 Le cadre institutionnel

L'analyse des pratiques d'enseignants expérimentés s'est posée à nous par le biais de questions en rapport avec le contexte d'une réforme et les problèmes posés par les changements survenus, qui ont modifié notre travail. En effet, le contexte général de la pratique enseignante est défini par des données institutionnelles, à savoir les plans d'études, les directives cantonales, les manuels officiels mis à la disposition des maîtres. Ces données institutionnelles fournissent à la fois un cadre et des contraintes à la pratique enseignante, contraintes fortes qui restreignent considérablement les choix des maîtres (Robert, 2001, Roditi, 2005), tout en garantissant une certaine homogénéité dans le système scolaire. Au départ de cette recherche, nous nous sommes interrogées sur les incidences d'un changement de réformes sur les choix mathématiques et didactiques d'enseignants chevronnés. Passent-ils aisément d'une réforme à une autre au regard des injonctions institutionnelles ? Observe-t-on des résistances ? Des changements ? Des évolutions ? Quels choix adoptent-ils dans ce contexte d'innovation ? Quelles « formes » prennent d'éventuelles évolutions de pratiques des professeurs, inhérentes à ces modifications du curriculum ? Pour quelles raisons se produisent ou non ces évolutions de pratiques enseignantes ?

Afin de restreindre notre domaine de recherche, nous avons choisi de concentrer notre étude à un domaine mathématique particulier et à un niveau d'enseignement précis. Nous avons ainsi fait le choix d'analyser des pratiques d'enseignants de première année du secondaire tunisien en algèbre et plus particulièrement dans l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations. En effet, à l'issue de nos recherches menées dans le cadre du DEA en didactique des mathématiques (Ben Nejma 2003) sur les rapports institutionnels et personnels aux équations via la mise en équation dans la transition au secondaire, l'importance d'une étude approfondie des pratiques d'enseignants relatives à l'enseignement de l'algèbre s'est dégagée de plusieurs points de vue.

## I .2 Notre travail de DEA

D'une part, l'étude des organisations mathématiques du savoir à enseigner au travers d'une analyse de programmes et de manuels nous a permis de pointer des déficits technologico–théoriques importants concernant la résolution des équations du premier degré ou la mise en équation(s) de problèmes (Ben Nejma 2003), dans la transition collège /lycée tunisien (9ème année de l'enseignement de base et 1$^{ère}$ année de l'enseignement secondaire, tranche d'âge 14-16 ans). Nous avions dès lors, fait l'hypothèse que ce déficit de justification ou de fondement des techniques algébriques enseignées expliquait certaines des erreurs récurrentes observées chez les élèves de fin du second cycle de l'enseignement de base (correspondant au collège) : relatives à leurs difficultés à interpréter le sens des lettres, une mauvaise interprétation du signe d'égalité, une appréhension erronée des formules et une maîtrise insuffisante des règles de traitement formel et des techniques de résolution des équations. Mais ce « vide institutionnel » dans le savoir mathématique à enseigner nous avait semblé à l'époque pouvoir être partiellement comblé au travers de l'intervention des enseignants dans « l'apprêtage[1] didactique » du savoir enseigné. Tout comme Ravel (2003), nous faisons l'hypothèse que les enseignants jouent un rôle central dans le processus de transposition didactique « interne » du savoir à enseigner au savoir effectivement enseigné.

"Lorsqu'un enseignant prépare son cours, nous pouvons faire l'hypothèse que pour lui, le texte du savoir est, à ce moment précis, temporairement stable. Cependant, ce texte offre encore au professeur une variété

[1] Nous empruntons la notion d'apprêtage didactique du savoir, au sens de Chevallard (1991, p.57) à Ravel (2003, p.107) « Nous entendons par savoir apprêté par un enseignant le savoir produit par celui-ci à la suite de choix mathématiques et didactiques faits dans une perspective d'enseignement du savoir à enseigner. Ce savoir apprêté se situe à l'interface de deux « mondes » emblématique de l'activité de l'enseignant en amont des pratiques en classe, il est également le moteur de son activité en classe. »

de choix. Les choix que fait l'enseignant pour construire son cours modifient le savoir à enseigner de même que la réalisation effective du projet de cours devant des élèves donne inéluctablement lieu à des modifications de ce projet. Ce travail de l'enseignant est donc un travail transpositif. Ainsi le rôle de l'enseignant est central dans le processus de transposition didactique interne : c'est à lui que revient la charge d' « apprêter » le savoir à enseigner au savoir enseigné. » (Ravel 2003, p.5)

L'étude des choix des enseignants tunisiens pour apprêter le savoir algébrique dans la transition collège- lycée nous est dès lors apparue cruciale, d'autant plus qu'elle pouvait éclairer une variabilité constatée dans les résultats de notre enquête auprès des élèves d'une classe à l'autre.

D'autre part, suivant notre étude de programmes et de manuels, en 2002-2003, que ce soit en fin de collège ou au début du lycée, l'approche amorcée autour de l'enseignement de l'algèbre est apparue essentiellement ***équationnelle*** (l'objet « équation du premier degré », le concept « d'inconnue » y occupaient une place centrale). L'avènement d'une réforme de l'enseignement secondaire rentrée en vigueur en 2004-2005 au niveau de la première année de lycée a attiré notre attention sur plusieurs points :

Tout d'abord une nouvelle organisation de l'étude nous a semblé se mettre en place : au travers de très nombreuses activités non corrigées et de l'absence d'une mise en texte synthétique des nouveaux savoirs introduits au fil de ces activités, induisant un nouveau partage des rôles et des responsabilités de l'élève et du professeur dans la construction du savoir[2].

D'autre part, il nous a semblé constater une imbrication nouvelle des thèmes et secteurs d'étude au sein du domaine de l'algèbre élémentaire. Une première lecture des nouveaux programmes et du manuel scolaire officiel tunisien correspondant nous fait émettre l'hypothèse d'interrelations nouvelles entre secteurs et thèmes d'étude : notamment, les savoirs à enseigner autour des équations linéaires et des fonctions linéaires et affines nous sont apparus renforcés et davantage mis sur le devant de la scène didactique, ce qui pouvait nous laisser préjuger d'une approche plus ***fonctionnelle*** dans l'enseignement de l'algèbre.

---

[2] Ce constat a d'ailleurs fait l'objet d'autres travaux relatifs à un tout autre domaine d'enseignement que celui de l'algèbre. *« Ces manuels se caractérisent par l'approche des concepts mathématiques par les activités au dépens du formalisme classique : énoncé, démonstration, applications. » (Abdeljaouad 2007, p.15)*

## I.3 Le choix du niveau d'enseignement, du domaine mathématique et des thèmes d'étude analysés

La transition par les élèves au cours secondaire est marquée, entre autres, par de nouveaux apprentissages fondamentaux, parmi lesquels le développement du raisonnement algébrique occupe une place importante. Ce niveau d'enseignement représente non seulement un moment de transition entre « enseignement de base et enseignement secondaire », mais également l'année où s'effectue pour les élèves une première orientation vers les filières scientifiques, littéraires. Dans ce cadre, bon nombre de connaissances développées antérieurement vont nécessiter un réajustement important dont une confrontation à approcher la résolution de problèmes différemment.

Connaître ensuite les enjeux de l'enseignement d'un domaine et la manière dont ils évoluent au fil des réformes, comprendre la rationalité sous-jacente aux choix curriculaires actuels tout en se posant la question de l'incidence qu'il peut y a avoir sur les pratiques enseignantes, nous semble crucial pour ce travail de recherche. Les divers travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre montrent une diversité d'entrées et des approches possibles dans le monde algébriques (Bednarz, Lee, Kieran, 1996 p.1) :

« The introduction of school algebra can take many different directions: the rules for transforming and solving equations (to which current teaching often reduces algebra), the solving of specific problems or classes of problems (which has played an important role historically in the development of Algeria and his teaching), the generalization of laws governing numbers ( a very strong focus on certain curricula), the more recent introduction of the concepts of variable and function (which appeared much later historically and which occupy a position of growing importance of some programs), and the study of the algebraic structures (which marked the school curriculum in the 1960s under the influence of modern mathematics).»

Des études menées dans ce sens mettent en évidence trois approches privilégiées pour cette entrée : une première approche par la généralisation à travers des situations numériques et géométriques, une seconde par la modélisation de situations en termes fonctionnels, et une troisième par les équations, qui semblait être privilégiée entre autres par la Tunisie jusqu'alors. Cependant, ce choix d'introduction de l'algèbre a semblé montré des limites, dénoncées dans plusieurs travaux en didactique des mathématiques.

Compte tenu de ces caractéristiques du curriculum tunisien que nous aurons l'occasion d'affiner dans la partie B de notre travail, nous avons choisi de nous intéresser aux thèmes des équations du premier degré à deux inconnues et systèmes d'équations qui restent des enjeux d'enseignement au lycée pour plusieurs raisons entre autres : Ces thèmes sont permanents pour ce niveau d'enseignement et occupent une place relativement importante au sein du domaine algébrique.

« Le système d'équations est le prolongement de l'équation à une inconnue et se trouve au cœur de l'algèbre élémentaire enseignée au collège et au lycée. Mais c'est aussi l'outil de base de l'algèbre linéaire qui est un des points essentiels de l'enseignement mathématique dans la majorité des instituions du supérieur : on peut considérer qu'il a un avenir riche. » (Coulange 2004, p. 4)

Les enseignants n'auront donc pas à faire à un nouveau savoir à enseigner au sein du domaine algébrique de ce fait, les changements éventuellement repérables au niveau de leurs pratiques, ne seront pas influencés par l'avènement de nouveaux savoirs mathématiques mais par des changements dans la façon d'envisager ou d'introduire ces savoirs. Ce qui peut nous renseigner sur les rapports, qu'ils entretiennent plus globalement avec certains aspects du travail algébrique (mise en équation, relation entre arithmétique et algébrique, travail algébrique, travail graphique, ...).

Ces notions ayant déjà fait l'objet de nombreux travaux en didactique de l'algèbre (Vergnaud, 1987, Kieran 1996, Coulange 2001, ...), on peut considérer qu'elles mettent en jeu plusieurs concepts, qui touchent à des aspects importants pour une entrée dans la pensée algébrique.

« Le champ conceptuel associé aux systèmes de deux équations à deux inconnues est vaste, il comprend notamment le concept de fonction de deux variables, l'articulation conceptuelle entre fonction et variable d'une part, équation et inconnue de l'autre, il comprend aussi les concepts d'algorithme de résolution, de représentation graphique, d'indépendance des informations. »(.Vergnaud 1987, p. 271)

Sans reprendre les différents travaux de recherche qui s'y rapportent, nous nous contenterons d'utiliser certains résultats à l'intérieur de nos analyses, comme permettant d'éclairer les phénomènes que nous observons.

Nous mettons ainsi au centre de la problématique de notre travail de thèse :

***L'impact d'une réforme sur les pratiques des enseignants, relativement à l'enseignement de l'algèbre élémentaire en première année de lycée en Tunisie.***

Notre première entrée dans cette thématique de recherche se réalise essentiellement selon deux dimensions d'analyse des pratiques enseignantes : la dimension institutionnelle et la dimension professionnelle mises en avant par Assude (2004). Nous reprenons à notre compte plusieurs phénomènes d'évolution curriculaires, pour étudier leur impact potentiel sur les pratiques des enseignants.

# II. Dimensions d'analyse de l'impact d'une réforme sur les pratiques enseignantes

## II.1 La dimension institutionnelle

La toute première dimension à considérer est celle relative aux prescriptions des institutions scolaires, qui sont précisément à l'origine des évolutions curriculaires. La théorie en didactique des mathématiques qui paraît sinon la plus pertinente, la plus développée en vue d'étudier cette dimension est la théorie anthropologique du didactique (TAD). Cette approche théorique émerge du souci de prendre en compte le rôle essentiel des institutions humaines dans la production et la transmission des savoirs mathématiques (Bosch et Chevallard 1999).

Au sein de cette approche, les acteurs ou individus du système d'enseignement deviennent des *sujets* qui occupent différentes *positions* au sein d'*institutions*. Dès lors, la notion de *rapport institutionnel à un objet de savoir,* renvoie aux *pratiques sociales* censées se réaliser au sein d'une institution avec l'objet en question, qui viennent en quelque sorte assujettir et soutenir les pratiques des sujets de cette institution. Ces pratiques relatives à l'activité mathématique ou didactique sont modélisées au travers de la notion clé *d'organisation praxéologique* [$T/\tau/\ \theta\ /\ \Theta$] suivant quatre composantes : un système de types de tâches T, des techniques $\tau$ (qui permettent d'accomplir ces type de tâches donné), des technologies $\theta$ (qui justifient et légitiment ces techniques), et enfin des théories $\Theta$ (qui justifient et légitiment à leur tour ces technologies).

Précisément, *« ces derniers développements de la théorisation anthropologique du mathématique viennent combler le manque de l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles.* » (Bosch et Chevallard 1999).

Nous nous réfèrerons dès lors à cette approche pour étudier les pratiques institutionnelles relatives à l'enseignement de l'algèbre dans l'institution « Première Année du Secondaire » en Tunisie et leur évolution. L'analyse des pratiques prescrites au sein de l'institution considérée permettra selon nous, d'appréhender la dimension institutionnelle des pratiques enseignantes. Comme le souligne Assude (2004), questionner les changements curriculaires à propos des raisons et des effets observables :

« Les changements curriculaires peuvent être pris au double sens de l'acte de changer et de l'état qui résulte de cet acte. Le premier sens correspond à des questions comme : pourquoi change-t-on ? Que change-t-on ? Comment change-t-on ? Questions qui se rapportent aux raisons d'être, aux objets et aux formes du changement. Le deuxième sens répond à des questions comme : les effets attendus des changements ont-il été observés ? Y a t il d'autres effets inattendus ? Questions qui correspondent aux résultats aux effets du changement. » (Assude 2004, p. 324).

**En effet, nous rendrons plutôt compte des implications des perturbations successives au sein des organisations de savoir mathématiques et didactiques prescrites par l'institution scolaire pour les pratiques enseignantes. Il s'agit de montrer en quoi la dimension institutionnelle des pratiques scolaires, qui fait l'objet d'une étude nourrie par la Théorie Anthropologique du Didactique en éclaire la dimension professionnelle : celle des pratiques enseignantes dans un contexte de réforme du curriculum.**

La prise en compte de différentes périodes d'enseignement, paraît cruciale pour ce volet de la recherche : les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner du passé, pouvant surgir comme des alternatives envisagées par des professeurs, ou avoir des influences plus indirectes sur les pratiques enseignantes actuelles. Ce point, les influences de pratiques institutionnelles rencontrées par un sujet au fil de l'histoire des institutions auxquelles il a été assujetties (que ce soit en position d'élève ou de professeur), a d'ailleurs été d'emblée envisagé par Chevallard (1995) lorsqu'il a défini le couple « rapport institutionnel / rapport personnel d'un sujet » aux objets de savoir : une personne étant quasiment toujours dans une certaine mesure un mauvais sujet de l'institution, car son rapport aux objets de savoir se forme par l'intégration au fil du temps des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie. Certaines recherches portant sur les pratiques enseignantes, s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chaachoua 1997, Coulange 2001) révèlent ainsi des pratiques d'enseignement (d'un thème d'étude donné) contrastées, qui bien que contemporaines, se réfèrent à des périodes scolaires antérieures.

C'est précisément, ce que nous explorons plus avant dans notre travail. Afin de cerner l'impact d'une réforme sur les pratiques enseignantes, il nous paraît intéressant d'analyser les pratiques de professeurs « expérimentés » : en nous interrogeant sur **l'influence potentielle ou effective de diverses périodes d'enseignement éventuellement vécues par eux en tant qu'acteurs en position d'enseignant au sein de l'institution considérée.**

Dans ce cadre, nous considérons les organisations praxéologiques du savoir mathématique à enseigner prescrites à différentes périodes, comme pouvant être des repères auxquelles les pratiques enseignantes se réfèrent plus ou moins partiellement, de façon plus ou moins consciente pour les professeurs concernés. Nous parlerons dès lors *d'organisations mathématiques et didactiques de référence.*

Cette approche conduit à poser des questions pertinentes, pour l'étude de l'évolution des praxéologies mathématiques au fil des réformes de l'enseignement tunisien :

**- Qu'est ce qui caractérise le rapport institutionnel à l'algèbre pour chaque période d'enseignement ?**

**- Qu'elles sont les spécificités des praxéologies mathématiques autour des équations à deux inconnues et système de deux équations à deux inconnues ?**

**- Qu'elles sont les points de ressemblance et de différences avec les *organisations mathématiques et didactiques de référence ?***

Nous nous inscrivons dans la lignée des travaux sur les pratiques enseignantes et nous considérons suivant Assude (2004), que l'approche anthropologique nous permet d'aborder la question des perturbations *exogènes* du système d'enseignement, par opposition aux perturbations *endogènes*, celles qui proviennent du système lui-même.

## II .2 La dimension professionnelle

Il s'agit dans cette perspective de s'intéresser aux pratiques *effectives* des enseignants. Quels que soient leurs fondements, les changements induits par une réforme bousculent des habitudes de travail et des équilibres dans la relation didactique. La prescription de nouvelles pratiques et de nouveaux objectifs représente ainsi, inévitablement, une source de changement ou de résistance au changement pour les enseignants qui sont pris dans une logique de gestion.

Précisons dès lors suivant Assude (2004) que ce qui nous intéresse, ce sont les spécificités potentielles de l'étude des pratiques professionnelles d'enseignants dans le contexte d'une réforme. Prendre en compte cette dimension d'analyse, soulève des questions en rapport avec des formes de pratiques enseignantes, qui peuvent s'avérer de l'ordre d'une résistance au changement ou liées aux perturbations de pratiques routinières :

La résistance au changement est elle présente aussi : une force active lorsqu'on veut préserver quelque chose ou une organisation qui est stable et économe, une force d'inertie lorsqu'on s'oppose au changement d'une manière active soit d'une manière passive. » (Assude 2004, p. 324).

Qu'il s'agisse de résistances ou de régulations, conscientisées ou non par les enseignants concernés, ces formes de pratiques peuvent être considérées comme l'écho de *perturbations endogènes* du système.

« Les régulations ou tentatives de régulations viennent répondre à des perturbations que l'on peut dire *endogènes*, au sens oŭ elles sont suscitées consciemment ou non par des actions du professeur ou des élèves. Les perturbations peuvent être *exogènes*, en provenance par exemple de l'autorité ministérielle. » (Chevallard 2001, p.246)

Les questionnements qui fondent notre étude des perturbations endogènes du système peuvent être formulés de la manière suivante :

- **Quels sont les effets d'un changement de programme dans les pratiques des professeurs ?**

- **Quelles « formes » prennent d'éventuelles évolutions de pratiques des professeurs, inhérentes à ces modifications du curriculum ?**

- **Pour quelles raisons se produisent ou non ces évolutions de pratiques enseignantes ?**

Pour étudier ces questions, nous nous situons dans le cadre de la TAD , ce qui conduira à exprimer les pratiques en terme d'organisations praxéologiques mathématiques et didactiques apprêtées par des professeurs autour des thèmes d'étude considérés, tout en interrogeant leur proximité aux organisations praxéologiques de référence.

Cette étude soulève l'importance du principe fondamental de codétermination des organisations mathématiques et didactiques, pour aborder la dimension professionnelle des pratiques en rapport avec des objets de savoir. Or pour décrire les organisations didactiques développées par un professeur par rapport à celles de référence , nous avons choisi de nous intéresser à la *topogénése,* c'est-à-dire aux responsabilités respectives du professeur et des élèves vis-à-vis du savoir mathématique enseigné : ceci nous a paru essentiel pour caractériser le type de pratiques enseignantes au regard de réformes récentes, qui suggèrent un important déplacement topogénétique d'ensemble, pour donner davantage de place à l'activité mathématique des élèves en situation de classe et ce dès les premiers moments de l'étude (de première rencontre ou exploratoire).

Par ailleurs, nous essayons d'identifier *des techniques didactiques* dans les pratiques enseignantes. Cette recherche des techniques du professeur s'apparente à l'identification de *routines* ou d'éléments stabilisés dans la pratique. Nous explorons la stabilité des pratiques de deux enseignantes expérimentées, à partir d'analyse de séances en classe en considérant l'enseignant comme gérant d'un environnement dynamique particulier , à savoir le rapport entre les élèves et le savoir mathématique ( Rogalsky, 2003) . Nous nous référons pour cela au cadre de la théorie de l'activité :

« Ce cadre intègre des régulations multiples de l'activité de l'enseignant par des composantes personnelles et par les caractères de la situation de travail dans laquelle il agit. Ces dernières déterminent en particulier un ensemble de contraintes épistémologiques, institutionnelles, collectives et sociales qui peuvent jouer dans la gestion même de la classe » (Robert, Rogalsky, pariès 2008, p. 58).

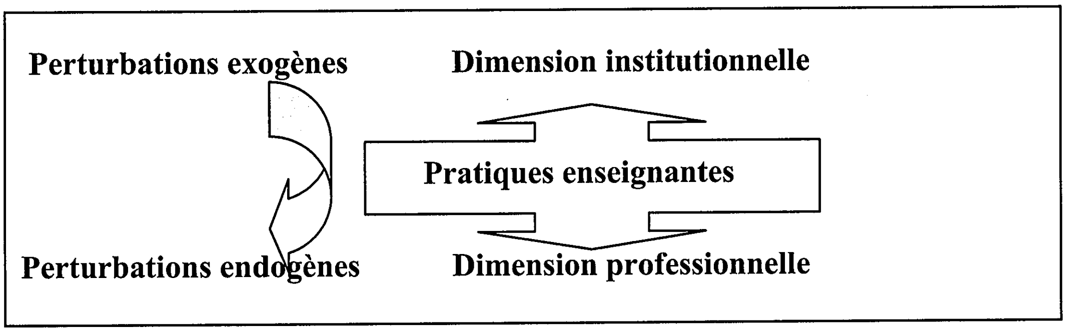
L'étude de ces routines, se retrouve au carrefour de différentes approches théoriques en didactique des mathématiques centrées sur les pratiques enseignantes que nous explicitons dans le second chapitre. L'identification de ces routines est cruciale, car elle peut nous renseigner sur la stabilité et l'imperméabilité des pratiques enseignantes aux changements prescrits à travers une réforme.

Mais nous intéressons également aux possibilités d'évolution des pratiques des professeurs : cette fois-ci en termes de *régulations* des praxéologies mathématiques et didactiques.

« On ne saurait trop souligner l'importance de l'étude du thème « routines et régulation » pour fonder et éclairer l'analyse et l'intervention en matière de constitution et d'évolution des praxéologies didactiques ($T_\pi$/ $\iota\pi$ /$\theta\pi$/ $\Theta\pi$). Cette étude doit notamment tenir compte des technologies didactiques des professeurs, des élèves, de l'autorité ministérielle, et de leurs possibilités de changement. » (Chevallard 2001, p. 247)

A cet effet, nous empruntons de façon métaphorique, le point de vue de la Théorie des Situations Didactiques, en nous interrogeant sur ce qui peut constituer un milieu de nature antagoniste pour les pratiques enseignantes et être à l'origine de régulations dans ces pratiques. Notamment, s'agit-il d'éléments observés, « vécus » par le professeur en situations de classe ou relatifs à des situations d'enseignement ? Si oui, lesquels ?

Le schéma suivant synthétise dès lors notre première entrée dans la thématique annoncée :




Ces éléments de notre cadrage théorique et méthodologique étant posés, nous explicitons l'ensemble du travail de la thèse.

## III. Présentation de la thèse

Nous définissons dans la première partie A de notre travail, le cadre théorique sur lequel nous nous sommes basée pour mener cette étude ainsi que la méthodologie générale que nous avons adoptée. En particulier, nous exposons des éléments théoriques considérés autour de l'approche « routines et régulations » qui offrent la possibilité d'une étude des pratiques enseignantes compte tenu de changements institutionnels. Comme nous l'avons déjà évoqué, ces notions didactiques nous permettent d'articuler les différentes dimensions à la fois institutionnelle et professionnelle des pratiques enseignantes, en prenant en compte la « dynamique » de ces pratiques au moment d'une réforme du curriculum.

Notre étude se centre dans un premier temps sur la dimension institutionnelle des pratiques. Outillée par la théorie anthropologique, nous analyserons d'un point de vue écologique, l'évolution des organisations didactiques et mathématiques mises en place autour de l'enseignement de l'algèbre dans l'institution « Première Année du Secondaire ».

Il s'agit dans cette partie de trouver des éléments de réponse aux questions suivantes :

- Quelles sont les organisations mathématiques et didactiques qui caractérisent le savoir mathématique à enseigner autour de l'algèbre élémentaire dans l'institution « Première Année du Secondaire » ?
- Comment évoluent ces organisations au fil des réformes de l'enseignement tunisien ?

- Par quelles évolutions se traduit la dernière réforme du programme du secondaire ?
- En quoi ces évolutions représentent-elles des perturbations exogènes, susceptibles de répercussion sur les pratiques des enseignants.

Nous commencerons par présenter des éléments théoriques, qui nous ont permis de mener l'analyse institutionnelle de l'enseignement de l'algèbre et plus particulièrement des thèmes d'étude « Equations à deux inconnues » et « Système d'équations » en se plaçant dans le cadre de la TAD. Nous mettons en avant, les résultats de certains travaux en didactique de l'algèbre, qui se complètent pour une vision synthétique de l'enseignement de l'algèbre au fil des époques passées et qui occasionnent des choix possibles, pour un enseignement de ce domaine différent de celui préconisé par la réforme actuelle.

La méthodologie mise en place nous donne par ailleurs, les moyens d'analyser les programmes et les manuels scolaires officiels pour le niveau d'enseignement considéré.

Dans un deuxième temps, l'étude des pratiques enseignantes objet des parties C et D repose sur les résultats de l'analyse institutionnelle menée dans la partie B. Nous nous centrons sur la dimension professionnelle des pratiques contemporaines d'enseignement de l'algèbre. Ciblant au travers des parties précédentes des contenus, qui nous ont paru au cœur des perturbations exogènes dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire en Première Année du Secondaire : les équations à deux inconnues et les systèmes linéaires, nous cherchons à renseigner les pratiques enseignantes correspondantes. Ces chapitres ont pour objectif de caractériser des perturbations endogènes du système didactique.

Dans le chapitre C1 nous exposons des éléments théoriques du cadre anthropologique ainsi que des outils empruntés plus ou moins directement à d'autres cadres d'analyse (Théorie de l'Action du professeur, Double Approche, Théorie des Situations), qui nous permettent de décrire les pratiques enseignantes. En particulier, nous abordons les questions d'ordre méthodologique pour décrire les praxéologies mathématique et didactiques à l'œuvre dans les classes des enseignants observés.

Le chapitre C2 est consacré à l'analyse de cahiers d'élèves que nous considérons comme un premier révélateur des pratiques enseignantes. En effet, dans une première

étape, nous avons menée une étude de type macroscopique visant à dégager les caractéristiques les plus marquantes des savoirs de professeurs. Nous appuyant sur l'approche anthropologique du didactique, nous émettons l'hypothèse que ces organisations praxéologiques répondent forcément pour une part, à des organisations du savoir à enseigner, ou de l'étude, qui sont ou ont été prescrites au sein de l'institution scolaire tunisienne. Nous commençons par tenter de repérer à laquelle ou auxquelles de ces organisation(s) praxéologique(s) mathématique(s) et didactique(s) de référence, le contenu des cahiers étudiés paraît davantage renvoyer. Tout en nous posant systématiquement la question de la conformité avec les organisations de l'étude actuellement prescrites, avec l'avènement de la période dite « moderne ».
Seul le contenu du cahier d'élève d'une professeure nous renvoie de façon presque exclusive à la période nouvelle[3] amorcée depuis 2005-2006 : avec une reprise apparente de nombreuses activités telles quelles, et un cours très proche de ce qui est suggéré par le manuel officiel. Etant celles qui étaient visiblement les plus conformes et de loin aux attentes de l'institution, l'étude des pratiques de cette enseignante, que nous nommons P1, pouvait *a priori* nous renseigner plus que les autres, sur les possibilités d'évolution des pratiques dans un contexte de réforme du curriculum.
A cet effet, nous avons mis en place un dispositif méthodologique d'observation naturaliste des pratiques enseignantes, que nous expliciterons plus loin. Ce dispositif et les analyses de données qui s'en suivent s'appuient sur une réflexion théorique conduite autour de l'étude des perturbations endogènes, en termes de « routines et régulations » : relatives aux pratiques enseignantes effectives, suite à une perturbation exogène du système didactique.

Le chapitre C3 est consacré à l'étude des pratiques de P1, sur deux années consécutives d'application de la réforme avec l'idée d'interroger les stabilités ou évolutions apparentes d'une année à l'autre en termes de routines et de régulations. Nous avons pour cela mené une analyse *a priori* des activités choisies en mettant particulièrement l'accent sur les enjeux de savoir visibles ou cachés dans les situations évoquées par ces activités, les techniques mathématiques possibles et la place qui leur est accordée dans les organisations développées.

---

[3] Pour les 5 cahiers d'élèves restant : le contenu d'un cahier fait écho à la période précédente dite contemporaine. Trois autres cahiers révèlent des organisations mathématiques enseignées qui s'inspirent de différentes organisations de références à la fois typiques de la période nouvelle et de la Contre-réforme ou de la Réforme.

Sur la base de nos différentes analyses *a posteriori* des situations d'enseignement observées pendant ces deux années dans les classes de P1, nous pointons des phénomènes d'enseignement qui peuvent être sources de perturbations endogènes et de déstabilisation ou *a contrario* de routinisation des pratiques enseignantes, dans un contexte de réforme.

Pour la première année d'observation (correspondant à l'entrée en vigueur de la réforme), nous examinons ce que notre étude révèle de la conformité ou de la non-conformité des pratiques de l'enseignante aux organisations mathématiques et didactiques de référence, c'est-à-dire celles mises en avant par la réforme de 2005-2006.

Pour la deuxième année, nous signalons les principales stabilités et évolutions des pratiques de P1, en pistant des routines et des régulations à l'œuvre et en les interrogeant comme autant de rapprochement ou d'éloignement des praxéologies de référence.

Dans la partie D, nous analysons les pratiques de deux autres enseignantes que nous nommons P2 et P3. Cette partie est décomposée en deux chapitres, qui décrivent et analysent les pratiques d'enseignement selon des objectifs différents.

Le chapitre D1 est consacré à l'analyse des organisations mathématiques et didactiques effectivement mises en place par P2, une enseignante expérimentée dont les praxéologies développées (à travers l'analyse d'un cahier d'élève) semblent plus conformes à la réforme dite « contemporaine » (1998-2003) que moderne (qui vient d'entrer en vigueur). Cette étude nous permet d'interroger plus particulièrement la perméabilité d'une réforme, par rapport à une autre, et les implications sur la gestion du savoir à enseigner en classe.

Dans le chapitre D2, nous envisageons une mise en regard avec la pratique de P1 en choisissant d'analyser les pratiques d'une stagiaire P3 dans sa gestion des organisations mathématiques présentes. Nous reprenons, d'une part, certaines de nos questions relatives à certains vides institutionnels repérés dans les organisations mathématiques et didactiques mises en avant par la nouvelle réforme et d'autre part, nous mettons en avant la gestion de certains phénomènes relevés au fil de l'étude des pratiques de P1 dans l'appropriation du savoir à enseigner.

**Nous émettons à ce sujet l'hypothèse forte, que la comparaison des pratiques d'une enseignante experte et d'une enseignante novice, permettra de montrer des phénomènes induits par des appropriations différentes des intentions didactiques**

**suggérées par la réforme, tout en nous renseignant sur des aspects économiques des organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner.**

En conclusion, les résultats de l'analyse de la dimension professionnelle seront confrontés aux résultats de l'analyse institutionnelle, afin de dégager les réponses aux questions qui sont à l'origine de notre travail.

Les réflexions théoriques cités, se trouvent à la croisée de différentes approches qui nous semblent devoir faire l'objet du premier chapitre, car elles servent de fil directeur à l'ensemble de notre travail de thèse. Il s'agit en quelque sorte d'une deuxième entrée dans la thématique annoncée. Elle a pour but de saisir la dynamique à l'œuvre dans les différentes dimensions des pratiques enseignantes (institutionnelles, et professionnelles (et épistémologiques)), à un moment de perturbation (exogène et endogène) du système didactique, que représente potentiellement toute réforme du curriculum.

# IV. Organigramme de la thèse

**Introduction et problématique**

**Partie A**

**Cadre théorique**

**Chapitre A : Considérations théoriques**

**Partie B**

**Dimension Institutionnelle**

**Chapitre B : Analyse des programmes et des manuels officiels**

**Partie C**

**Dimension professionnelle**

**Chapitre $C_1$ : Points de vue théoriques et choix méthodologiques.**

**Chapitre $C_2$ : Analyse de cahiers d'élèves**

**Chapitre C3 : Analyse des pratiques de P1**

**Partie D**

**Chapitre D1 : Analyse des pratiques de P2**

**Chapitre $D_2$ : Analyse des pratiques de P3**

**Conclusions et perspectives**

# Partie A

## Cadre théorique

# Chapitre A. Considérations théoriques

## Introduction

L'étude des pratiques enseignantes en termes d'invariants récurrents, d'actions naturalisées, de décisions visant à maintenir, rétablir ou rééquilibrer le système didactique dans un contexte de perturbations institutionnelles, nous a paru en lien direct avec les travaux se situant dans une approche : « routines et régulations » qui a fait l'objet de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques (Août 2001). Les nombreuses recherches présentées à cette occasion (Chevallard, Artaud, Grenier, Robert...) intègrent des problématiques et des cadres théoriques différents, mais se rejoignent pour l'étude d'aspects relatifs aux routines et régulations des pratiques des professeurs.

Nous avons alors pensé, que cette entrée par l'étude des routines et des régulations permettait d'une part, d'articuler les différentes dimensions à la fois institutionnelles et professionnelles des pratiques enseignantes déjà évoquées, d'autre part, de prendre en compte la « dynamique » de ces pratiques au moment d'une réforme du curriculum.

## I. Etude des Perturbations d'un système institutionnel

### I.1 Changements institutionnels

Dans la dynamique des réformes de l'enseignement, se pose inévitablement la question du degré d'importance des changements attendus, et de leur capacité potentielle à transformer ou modifier les pratiques d'enseignement.

Assude (2004) distingue plusieurs degrés de modifications du système institutionnel : allant des **« petits changements » aux « grandes réformes »**

- Des réformes « politiques » relatives aux ajustements entre les savoirs scolaires et les nouvelles finalités de l'école ou de l'institution.
- Des réformes « scientifiques » relatives aux ajustements entre les savoirs scolaires et les savoirs savants.

- Des « petits changements » relatifs aux ajustements des pratiques des acteurs, aux contenus ou buts de l'enseignement ou à des innovations du système introduisant des objets et outils nouveaux.

Cette échelle des modifications du système institutionnel n'augure pas forcément du degré d'importance des changements des pratiques enseignantes. Ainsi, ce que Assude qualifie de « petits changements » peuvent être ceux qui touchent de près aux pratiques enseignantes et être perçus comme « importants » pour les enseignants concernés.

Nous émettons l'hypothèse, que les changements curriculaires récents de l'enseignement tunisien relèvent plutôt de « petits changements », dont l'enjeu réside en la recherche d'un certain équilibre institutionnel du système ou d'une stabilité à long terme.

Quoi qu'il en soit, le rapport à l'innovation et aux changements prescrits par l'institution est en partie déterminé par les motivations et les résistances de l'enseignant à s'approprier des savoirs et des savoir-faire particuliers et nouveaux.

Comme l'évoque Assude (2004), se pose également la question de la lisibilité de ces changements aux yeux des acteurs de l'institution scolaire tunisienne, notamment des professeurs :

« L'institution scolaire, par les réformes successives, indique un certain nombre de changements, surtout ceux qui sont identifiés et voulus, mais les changements « invisibles » dans un premier temps ne sont pas forcement visibles et repérés par l'institution ou par les acteurs. » (Assude 2004, p. 324)

Il nous a semblé intéressant de poursuivre l'effort engagé par cette auteure pour caractériser plus finement les modifications du système institutionnel tunisien liées à une réforme. Nous mettons en avant plusieurs dimensions des perturbations institutionnelles, mises en jeu par les changements prescrits au sein de l'institution.

## I .2 Différentes dimensions de perturbations institutionnelles

Au travers des lectures préliminaires des instructions officielles et des manuels scolaires officiels relatifs aux deux dernières réformes de la première année de l'enseignement secondaire, nous avons pu constater des changements importants, tant au niveau des organisations mathématiques, que celle des organisations didactiques : des changements qui se situent à plusieurs niveaux et qu'on pourrait qualifier de perturbations institutionnelles.

L'étude de ces différents bouleversements nous renvoie à des éléments théoriques développés par la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2001). Nous distinguons *a priori* deux dimensions possibles de changements : celle *des organisations mathématiques* du savoir à enseigner, la dimension relative aux organisations didactiques destinées à organiser l'étude de ce savoir. A ces deux dimensions, nous en rajoutons une troisième que nous surnommons *la dimension ostensive / non ostensive* étroitement reliée à celle des organisations mathématiques, mais qui se focalise sur des aspects sémiotiques du travail mathématique. Cette dimension nous est apparue d'emblée importante, car elle conditionne selon nous la lisibilité d'un changement dans le savoir mathématique à enseigner par les acteurs de l'institution. Nous y reviendrons plus loin.

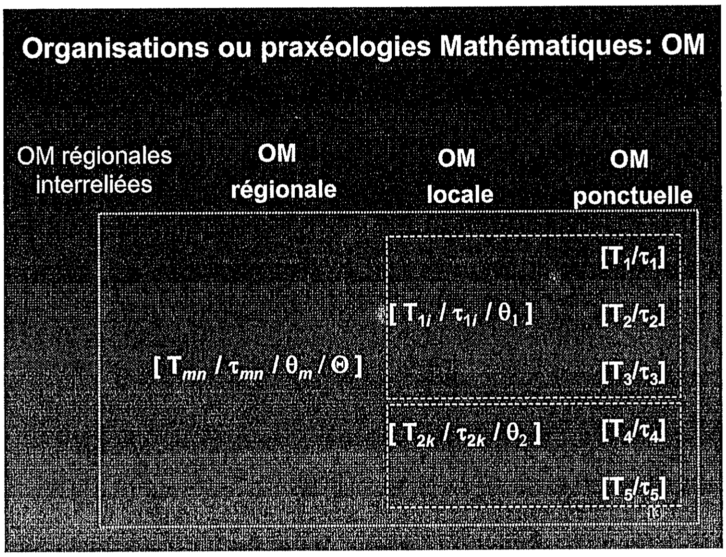
Nous nous proposons à présent de développer chacune de ces dimensions, en nous appuyant sur les éléments théoriques issus de la théorie Anthropologique du didactique (Chevallard 2001).

### I.2.1 Des perturbations relatives aux praxéologies mathématiques

Les perturbations en lien avec les praxéologies mathématiques, se traduisent par des changements repérés au niveau des organisations mathématiques du savoir à enseigner. Les organisations affectées sont plus ou moins locales ou globales, on pourrait penser que ces changements sont « visibles » ou pas par les acteurs de l'institution en position d'enseignant.

La notion de praxéologie va permettre d'étudier cette action humaine institutionnelle ou encore ces pratiques institutionnelles à travers le postulat que : *Toute pratique institutionnelle se laisse analyser en un système de tâches, qui peuvent elles-mêmes analysées par un système de tâches/ techniques/ technologies/ théories.* Ce modèle proposé par l'approche anthropologique permet d'analyser les activités institutionnelles et donc d'analyser le rapport institutionnel à un objet de savoir, qui à son tour est clivé en un rapport institutionnel pour l'élève et un rapport institutionnel pour l'enseignant. Ces rapports institutionnels pour l'élève et pour l'enseignant répartissent les rôles, tâches et compétences respectifs de chacun dans l'institution.

Des outils de description des organisations mathématiques existent et permettent de restituer la dynamique de celles-ci (Chevallard 1999, p229). En effet, la description des organisations mathématiques en terme d'organisations mathématiques ponctuelles ou sujets (OM renvoyant à une unique tâche), d'organisations mathématiques locales ou thèmes (OM organisant le regroupement d'un ensemble de type de tâche autour d'une technologie), d'organisations mathématiques régionales ou secteurs (OM organisée par un amalgame d'OM locales autour de la théorie ) et d'organisations mathématiques globales ou domaines (regroupement de plusieurs OM régionales ), permet de distinguer différents niveaux d'OM et de tenir compte de la dynamique existant entre ces organisations mathématiques de différents niveaux .




Suivant des travaux assez récents dans le cadre de la théorie anthropologique, une hiérarchie de niveaux de détermination mise en avant par Chevallard, allant des sujets d'étude à la discipline permet de préciser cette première échelle des organisations praxéologiques, tout en les repositionnant les unes par rapport aux autres.

Ces niveaux supérieurs de détermination didactique sont définis de la façon suivante :

*La discipline (NV1), pour nous les mathématiques est considérée comme un amalgame de domaines d'études.

*Le domaine d'étude (NV2) quant à lui, correspond à une organisation globale représentant à son tour une amalgamation de plusieurs organisations régionales ($Tj_i/\delta j_i/\theta j/ \theta_k$).L'œuvre, elle même est un domaine d'étude.

*Le secteur d'études (NV3) fait appel à l'organisation régionale donc à l'amalgamation d'organisations locales se basant sur la même théorie.

*Le thème d'études (NV4) correspond à l'organisation locale ($Ti/\delta_i/\theta/\ \theta$) $_{i..}$ Ces thèmes sont réunis dans des organisations régionales étiquetées comme secteur d'étude.

*Le sujet d'études (NV5) renvoie généralement à un type de tâche T, ce sont des questions et des organisations ponctuelles. Ils se regroupent plus ou moins clairement dans des organisations locales qui représentent les thèmes d'étude.

« La reconnaissance de la hiérarchie de niveaux ainsi ébauchée qui va des sujets d'études à la discipline en passant par thèmes, secteurs et domaines a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte ». (Chevallard 2002, p.2).

## I .2.2 Des perturbations relatives aux praxéologies didactiques

Nous considérons les perturbations relatives aux praxéologies didactiques comme étant liées aux changements repérables au niveau des organisations didactiques. Cela renvoie, dans la Théorie Anthropologique du Didactique, en premier lieu aux moments de l'étude dont l'importance, ou la « forme », ou l'articulation suivant l'avancée du temps didactique peut varier. L'ensemble des moments de l'étude (Chevallard, 1999) est une façon de décrire ces organisations didactiques :

« La manière dont une organisation didactique OD conduit à mettre en place une organisation mathématique peut être analysée, en première approximation, en interrogeant la manière dont elle réalise les différents moments de l'étude à travers lesquels cette mise en place s'accomplit, l'un des objectifs d'une telle approche étant de n'écarter à priori aucune organisation de l'étude observable ou même concevable. » (Chevallard, 2002, p .12)

<u>Groupe I : (Activités d'étude et de recherche)</u>

1. Moment de la première rencontre avec T.
2. Moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique.
3. Moment de la construction du bloc technologico-théorique.

<u>Groupe II : (Synthèses)</u>

4. Moment de l'institutionnalisation

<u>Groupe III : (Exercices & problèmes)</u>

5. Moment du travail de l'organisation mathématique (et en particulier de la technique).

<u>Groupe IV : (contrôles)</u>

6. Moment de l'évaluation.

L'ordre des différents moments didactique n'est pas suivi ou à suivre de façon linéaire dans le temps, il s'agit en fait de décrire *une réalité fonctionnelle, et non pas chronologique* et de caractériser le système de contraintes qui pèsent sur l'activité d'enseignement, des contraintes perçues dans notre approche comme des perturbations institutionnelles.

Ces deux dimensions ne peuvent être considérées indépendamment l'une de l'autre dans la mesure où les organisations didactiques sont supposées être soutenues par les différentes organisations ou praxéologies mathématiques. La codétermination de ces deux « facettes » des perturbations s'exprime à travers la codétermination des organisations mathématiques et didactiques mise en avant par Chevallard :

« Le principe fondateur des didactiques, au moins au sens qu'a donné Guy Brousseau à ce terme est que non seulement ce qui est transmis dépend de l'outil avec lequel on prétend réussir sa transmission, mais encore que les organisations de transmission, c'est à dire les organisations didactiques, se configurent de façon très étroite liée à la structure de ce qu'il faut transmettre. En d'autres termes, les organisations didactiques dépendent fortement des organisations à enseigner : des organisations mathématiques dans notre cas. Cet isomorphisme didactico-mathématique est ce que j'exprime à travers une hiérarchie de niveaux de codétermination des OM et OD. » (Chevallard 2001, p.121).

### I .2.3 Des perturbations relatives à la dimension sémiotique

Aucun des deux axes d'analyse, de Duval et de Chevallard, ne saurait être négligé pour l'étude de la dimension sémiotique de l'activité mathématique. Dans le cadre de l'approche anthropologique, se pose la question de la nature des objets mathématiques, qui renvoie au *problème de la description des pratiques institutionnelles oŭ l'objet de savoir est engagé* et à la nature des composantes de l'organisation praxéologique (Bosch, Chevallard, 1999, p.88)

« Il convient, au contraire, d'examiner la manière dont l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu. » (Bosch, Chevallard 1999, p .88).

C'est pour analyser, selon ce point de vue, l'activité mathématique que les termes d'ostensifs et de non ostensifs ont été introduits :

« D'un côté, il y a les objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut effectivement manipuler dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a les objets *non ostensifs*, que je nomme aussi émergents, et que l'on peut effectivement *évoquer* à l'aide d'objets ostensifs. » (Chevallard 1995, p.50).

Bosch et Chevallard expriment cette dialectique entre ostensifs et non-ostensifs en affirmant que la co-activation d'ostensifs et de non ostensifs est toujours présente dans l'activité mathématique. Elle se retrouve à tous les niveaux d'activité (niveau technique mais aussi technologico-théorique).

Dès lors, la question de la disparition ou de l'apparition de certains ostensifs peut constituer une source de perturbation au niveau des pratiques institutionnelles :

« On retrouve alors la problématique des moyens du travail mathématique non considérés comme instruments et donc non gérés dans les contrats didactiques, mais dont la maîtrise est néanmoins nécessaire aux élèves, quoique elle soit laissée plus ou moins complètement à leur charge....Une telle " évolution ostensive " ne se réalise jamais de manière uniforme et universelle mais dépend étroitement des institutions et des conditions écologiques qu'elles sont capables de créer pour faire vivre des praxéologies déterminées. » (Chevallard 1999, p.113).

Nous émettons l'hypothèse (Chevallard 1999) que le modèle d'organisation praxéologique intègre les ostensifs à travers lesquels s'exprime et se travaille le savoir mathématique. Les changements ayant trait à cette dimension ostensive ont une influence importante au niveau de l'activité mathématique elle-même, et donc des rapports des acteurs au savoir en jeu, comme le souligne Chevallard :

« Etant donné qu'une praxéologie mathématique n'est pas une entité statique, mais une réalité dynamique qui crée et qui soutient l'action, nous avons montré que le simple remplacement d'un ostensif par un autre, sans modification apparente de la praxéologie initiale qui l'intégrait, pouvait bouleverser complètement l'évolution de l'activité, aussi bien au niveau technique qu'au plan des technologies et des théories justificatives, voire des types de tâches mêmes » (ibid. p.114).

Elle nous paraît importante à prendre en compte en tant que telle. Elle permet selon nous de caractériser en partie des changements « visibles » ou « invisibles » du savoir mathématique à enseigner, pour les acteurs du système en position d'enseignants. Des changements concernant directement les ostensifs se « donnent à voir ». Tandis que des changements concernant la dimension non-ostensive du travail mathématique seraient plus « invisibles », surtout si les ostensifs associés ne varient pas ou peu.

« Une pratique ne peut exister et se dérouler que parce que les acteurs peuvent constamment la « lire », « voir » ce qu'ils font et identifier les gestes qui permettent de la continuer. Ce décodage n'est possible qu'à travers le rapport des acteurs aux objets de l'activité, et plus précisément grâce à un certain sémiotisme des praxèmes, sémiotisme qui permet notamment que certains de ces praxèmes puissent fonctionner comme des emblèmes de l'objet. » (Ibid. p.114).

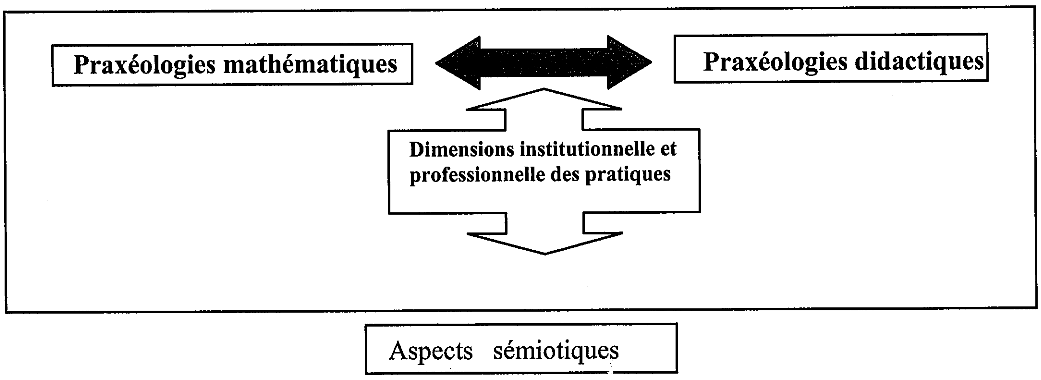
Un autre point de vue sur la dimension sémiotique de l'activité mathématique qu'il nous paraît essentiel de prendre en compte est celui de Duval (1993). Ce dernier caractérise le fonctionnement cognitif de la pensée humaine en général et celui de la pensée mathématique en particulier, en distinguant un objet de sa représentation. L'auteur souligne ce qu'il appelle *le paradoxe cognitif de la pensée mathématique*. Ce paradoxe tient au fait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception mais seulement à travers des représentants et que seule la distinction entre un objet mathématique et sa représentation peut garantir son appréhension qui ne peut être que conceptuelle :

« D'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentation sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible » (Duval, 1993, p4).

Le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre, présente un caractère crucial, non seulement pour la compréhension de notions concernées par les différentes représentations, mais aussi pour la maîtrise du fonctionnement de chacun des registres. Cependant, cette coordination entre différents registres n'est en aucun cas naturelle aussi observe-on à tous les niveaux d'enseignement un « cloisonnement » des registres de représentations.

Ce n'est pas tant l'activité de conversion qui nous intéresse dans cette étude, mais c'est l'étude des organisations praxéologiques autours des objets algébriques, qui intègrent les différents registres de représentation sémiotiques. Ceci constitue un axe important pour l'analyse des pratiques enseignantes, dans le contexte de la réforme de l'enseignement tunisien. Les registres de représentation sémiotique seront ainsi utilisés pour déterminer pour une bonne part, des techniques selon lesquelles les tâches sont censées être résolues. Ils révéleront le mode d'appréhension imposé ou le recours, conscient ou inconscient de la part des concepteurs des manuels et des enseignants, à certains registres plutôt que d'autres et donc le recours à certaines techniques de résolution pour un type de tâche donné plutôt qu'un autre ou pour une organisation mathématique locale plutôt qu'une autre.

Nous synthétisons les différentes dimensions de perturbations exogènes prises en compte dans notre analyse :




**Différentes dimensions des perturbations**

Si l'étude des perturbations exogènes du système institutionnel, du point de vue de leurs manifestations par rapport aux objets de savoir ou au domaine du savoir et de leurs raisons d'être, constitue un axe important de cette étude, se donner les moyens d'étudier les effets de ces perturbations sur la dimension professionnelle (notamment pour des enseignants chevronnés) représente pour nous un objectif majeur.
En effet, et comme le fait si bien remarquer Assude : « Ce n'est pas parce que les programmes changent que les pratiques changent et parfois les petits changements ont un impact plus durable que ce qu'on aurait pu prévoir. » (Assude 2004, p .325)

Ceci conduit inévitablement à s'interroger sur **les perturbations endogènes propres** aux pratiques des enseignants et à se poser la question des outils théoriques nécessaires à l'étude de ces perturbations internes au système didactique.

## II. Etude des perturbations dans les pratiques enseignantes : Autour des routines et régulations des pratiques enseignantes

L'arrivée d'une réforme peut soulever l'incrédulité au regard de la nécessité du changement. Pour certains enseignants, le fait que les réformes antérieures n'aient pas apporté de solution parfaite, pourrait aller dans le sens de l'inutilité d'un investissement dans celle-ci puisque « c'est du pareil au même». Pour d'autres, le système institutionnel dans lequel ils ont été formés aurait fait ses preuves, ce qui justifierait leur conformisme à l'égard de leur travail.
Dans quelle mesure les changements curriculaires induisent-ils des changements au niveau des du travail des enseignants ? Lorsque le prescripteur change les règles du jeu, celles-ci sont elles perçues par les enseignants et quelles positions ou postures adoptent-ils face aux changements ?
Nous précisons d'abord ce qu'on entend par pratique, tout comme Robert, nous réservons l'expression « pratiques enseignantes » à l'ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe. Les « pratiques en classe » désignent tout ce que dit et fait l'enseignant en classe, en tenant compte de sa préparation, de ses conceptions et connaissances en mathématiques et de ses décisions instantanées, si elles sont conscientes.

Comme dans les travaux de l'auteure, nous considérons le travail de l'enseignant comme un moyen pour le chercheur de recomposer la complexité des pratiques et d'approcher leur cohérence interne, nous faisons ainsi l'hypothèse que :

« Les pratiques enseignantes sont complexes, non réductibles à des unités séparées, comme la préparation mathématique ou le déroulement etc., vraisemblablement non décomposables en mises en fonctionnement de connaissances isolées disciplinaires, didactiques, pédagogiques, etc., car des recompositions de tous ordres s'opèrent constamment mais il s'ajoute toujours en classe des éléments non prévisibles, qui pourront à leur tour influencer les séances suivantes. La prise en compte explicite du travail (mathématique) réel de l'enseignant est pour nous un moyen de restituer cette complexité. » (Robert 2002, p. 8).

Parmi les changements rendus nécessaires par l'application du nouveau curriculum, l'ajustement de la pratique enseignante représente l'un des plus importants. Le nouveau rôle de l'élève exige, en contrepartie, le renouvellement du rôle de l'enseignant. Étant donné qu'on reconnaît à l'élève un rôle actif et réflexif dans ses apprentissages, rôle de l'enseignant se modifie pour devenir celui d'un guide, d'un accompagnateur qui conduit l'élève au cœur de ses apprentissages. Cette évolution déterminante du rôle de l'enseignant doit transparaître concrètement au niveau de sa pratique.

Cette problématique de la modification des pratiques lorsqu'une perturbation exogène survient à l'occasion d'un changement de réforme objet de ce travail, est assez complexe dans la mesure où elle fait apparaître des phénomènes didactiques que certaines approches ont pointé récemment (Chevallard, Artaud, Robert 2001, Assude 2004) : résistances, stabilité, routines, et régulations.

## II.1 Perturbations endogènes/Routines

Nous avons déjà souligné l'intérêt, que nous accordons dans le cadre de notre problématique à l'approche en termes de routines et régulation lorsqu'on pense la pratique de l'enseignant comme une praxéologie avec ses composantes théorique et pratique. L'appropriation de nouvelles organisations ou pratiques, suppose celle des deux composantes et de leurs articulations .Nous développons dans ce qui suit, différents travaux en lien avec cette approche, en soulignant les éléments théoriques déterminants pour l'étude des perturbations endogènes dans un contexte de changement de réformes.

« L'introduction de novations apparaît difficile, voire impossible : lorsqu'une routine a été créée, le système se fige et on perd l'idée que les choses pourraient être autrement qu'elles ne sont, devenant ainsi incapable d'envisager que d'autres routines soient possibles. (Chevallard, Artaud 2002, p.247).

### II.1.1 Dans le cadre de la TAD

Dans le cadre de la théorie Anthropologique du didactique développée par Chevallard, dans la *« dynamique praxéologique »* qui caractérise tant les pratiques enseignantes prescrites par l'institution que les pratiques enseignantes effectives, Chevallard, Artaud (2002), ***repère des phénomènes de routinisation par l'intervention de nécessaires processus de régulations entrepris par l'enseignant sous les*** **contraintes de l'institution.** Dans ce cadre, les routines sont modélisées en termes de techniques mises en œuvre par les enseignants pour accomplir les types de tâches routinières du métier (on envisagera également des routines côté élèves qui peuvent s'installer en rapport avec les tâches routinières qui leur sont proposées).

« En comparaison avec la notion de praxéologie, l'intérêt du terme routine pour l'étude des pratiques enseignantes du point de vue de la didactique est qu'il nous invite à dépasser l'évidence culturelle de notre regard sur ces pratiques en nous amenant à décrire le non visible de l'organisation didactique de l'univers mathématique construit pour les élèves, de mettre à jour et d'en expliciter les fonctions didactiques et celles relatives à la constitution de leur rapport au savoir. » (Tisseron 2002, p.268).

Dans ce cadre, c'est l'étude de la dimension exogène / institutionnelle qui permet en partie de caractériser des routines dans les pratiques enseignantes vues comme conséquentes des contraintes de l'institution.

L'intérêt d'identifier des routines réside dès lors dans la recherche des invariants dans la pratique professionnelle, des techniques relativement installées qu'on pourrait qualifier de routinières. Ce point de vue rejoint en quelque sorte celui de Robert (2006), puisqu'au niveau des pratiques, décrites en termes de dynamique praxéologique ou organisées en système cohérents selon des logiques différentes, les routines s'installent et se forment sous des contraintes spécifiques à l'exercice du métier :

« Il y a des contraintes fortes qui restreignent considérablement les choix, aussi bien externes à l'enseignant (programmes, horaires, habitus liés à la classe) que plus internes (conceptions personnelles, compétences, expériences...) Cela expliquerait en partie la relative stabilité, signalée par certains chercheurs des pratiques d'un enseignant à partir de quelques années d'enseignement et, corrélativement, la difficulté à modifier ses pratiques. Cette relative stabilité justifie le fait d'extrapoler certaines régularités à partir de l'observation d'un nombre réduit de séances. » (Robert 2000, p .3).

### II.1.2 Dans le cadre de la double approche

Dans le cadre de la double approche (Robert, 2002), le caractère de routines peut être attribué à des « phases » (actes, gestes, discours, moments...) répétées, quasi-automatiques relevées au niveau des pratiques effectives. Il s'agit pour nous de caractériser des routines en étudiant les « invariants » des pratiques effectives des enseignants, suivant une dimension plus mixte : exogène/endogène.

Par ailleurs, pour approcher la complexité des pratiques enseignantes selon cette approche, nous sommes amenées à considérer d'une part, le point de vue des apprentissages potentiels des élèves, liés aux contenus travaillés en classe, aux modalités de répartition des activités et aux formes de travail pendant les séances, d'autre part, le point de vue du métier enseignant. Les activités possibles des élèves sont déduites des mises en relation des analyses des tâches et de déroulements. Elles sont reconstituées à partir des analyses de déroulements, elles mêmes organisées à partir des analyses a priori. Ces dernières nous donnent un premier découpage selon les tâches proposées dans les énoncés et le travail organisé par l'enseignant, sur ces tâches et sur les sous tâches qu'il indique (Robert, 2006).
Cette lecture permet selon ce point de vue de relire les données du point de vue du choix de l'enseignant pour la séance. La dimension cognitive est dégagée essentiellement à partir des choix d'énoncés proposés aux élèves, la dimension médiative est recomposée à partir de toutes les spécificités des déroulements analysés. La nature des routines concerne les choix cognitifs et méditatifs des enseignants » (Robert, 2002)
La composante cognitive résulte de l'analyse de ce que l'enseignant planifie pour gérer les connaissances mathématiques des élèves, la composante médiative est en lien avec les modes d'interaction en classe et la gestion par l'enseignant des l'organisation de l'étude. Dans le contexte de notre étude, la prise en compte de la combinaison de ces deux composantes permet d'approcher la logique d'action des enseignants observés.

« La composante cognitive traduit ce qui correspond au choix et aux anticipations de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leu organisation, leur quantité, leur ordre, leur complexité, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'environnement mathématique dans lequel sont placés les élèves et sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant ». (Robert 2007, p.56)

« Les choix correspondant aux déroulements, les improvisations, les discours, l'enrôlement des élèves, la dévolution des consignes, l'accompagnement des élèves dans la réalisation de la tâche, les modes de validation, les expositions de connaissances, incrémentent la composante médiative. Elle renseigne sur les trajectoires organisées pour les différents élèves, sur leurs activités possibles, et à terme, sur les apprentissages potentiels correspondants. » (Ibid. p .56).

Par ailleurs, la composante institutionnelle peut être approchée par l'étude des contraintes institutionnelles pesant sur les pratiques enseignantes dans une logique de légitimité et de conformité aux nouvelles orientations. Plus précisément, elle permet d'approcher la manière dont les enseignants assument et négocient leurs assujettissements aux contraintes institutionnelles.

« Ce sont en particulier des études de manuels, et de programmes, et des études de milieux professionnels qui nous donnent accès à cette quatrième composante. Par exemple la demande institutionnelle de « faire

faire des activités aux élèves avant le cours » s'est traduite dans les manuels par un rajout d'exercices proposés avant le cours mais rarement adaptés à faire trouvé aux élèves une partie du cours à venir. Cela montre le poids des habitudes et des réponses déjà là devant une nouvelle demande. » (Robert, Rogasky 2002, p.518).

Dés lors, l'étude de la composante institutionnelle prend dans le contexte de réforme (éventuellement modifié de façon significative) un sens particulier dans la recherche d'un nouvel état d'équilibre ou d'un niveau de cohérence avec les composantes médiative et cognitive des pratiques .Cette cohérence modelée à la fois par l'exercice du métier, par la personnalité du professeur et par les contraintes externes peut être approchée par le repérage de régularités de routines dans les pratiques enseignantes.

Nous cherchons en particulier à comprendre comment les enseignants s'adaptent-ils aux changements curriculaires compte tenu du fonctionnement des connaissances en jeu et des bouleversements qui peuvent déstabiliser leurs pratiques.

L'identification de ces routines peut dés lors nous renseigner sur la fréquentation des mathématiques donnée aux élèves et sur la possibilité d'une recherche d'économie accompagnant l'activité d'enseignement. Je cite :

« Du coté du métier, nous pensons que les routines sont liées à l'indispensable recherche d'économie qui accompagne toute activité humaine durable, en particulier chez l'enseignant… Du côté de l'apprentissage des élèves, nous pensons que toute forme de répétition peut avoir des effets, peut contribuer à donner des repères aux élèves dans la classe, contribuer à leur donner des habitudes, aussi bien dans leur travail que dans la manière de les aborder. (Butlen, Robert2001-2002, p. 221).

Pour analyser la dimension professionnelle des pratiques, nous admettons tout comme Robert (2002) que les routines sont complexes mais marquent également un caractère de cohérence que l'imbrication des différentes composantes des pratiques permet d'approcher :

« Les routines sont complexes et cohérentes. Ce caractère de complexité est lié au fait que les routines peuvent être recomposées à partir de quatre composantes cognitives, méditatives, personnelles, sociales et institutionnelles. Les routines se repèrent à travers les logiques cognitives et méditatives de l'enseignant. Elles s'interprètent à l'aide de logiques personnelle et institutionnelle notamment. La recherche de répétition permet d'atteindre plus facilement la complexité des pratiques. » (Ibid. p .223).

Une routine peut donc nous renseigner sur la stratégie globale du professeur, identifiée à l'aide d'autres indicateurs. Elle semble être la plus petite « unité » permettant d'identifier (au moins partiellement) l'activité du professeur. Un geste isolé ne donne cependant pas assez d'informations, car il peut être mobilisé par un professeur mettant en œuvre un autre type de stratégie et aussi être convoqué par d'autres routines. (Masselot, Robert 2007, p. 56)

Plusieurs travaux qui portent sur la stabilité des pratiques enseignantes en mathématiques postulent l'existence de caractéristiques stables en classe, à une échelle de temps « moyenne » par rapport à la dimension professionnelle Josse (1993), Chiocca et al (1991), Robert 1995, Robert (1995) pour la répartition des différents discours en classe (strictement mathématique, enrôlement), Hache (2001) pour la stabilité de certains discours de l'enseignant indépendamment du contenu mathématique en jeu. Pour sa part, Vandebrouck (2002), retient des invariances dans l'utilisation du tableau (noir) par un même enseignant dans trois classes de lycée de niveaux différents. (Roditi (2003) a relevé des choix invariants de déroulements chez quatre enseignants, lors de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième.

(Pariés, et al) illustrent à travers une étude de deux cas d'enseignants expérimentés dans des séances similaires : dans le premier cas, il s'agit de la même séance portant sur plusieurs exercices sur la divisibilité, dans le deuxième, il s'agit d'exercices de géométrie. Ces deux cas illustrent des occurrences différentes de la stabilité recherchée : le choix de tâches identiques pour des classes de même niveau est attendu, pourtant on relève une stabilité des déroulements et des discours alors même que les classes sont différentes.

Quoiqu'il en soit, l'étude des routines dans le contexte particulier d'un changement de réformes permet de mettre en évidence des phénomènes liées à la stabilité d'une ou plusieurs composantes des pratiques ou d'autres en rapport avec une dynamique des pratiques liées aux contraintes des situations vécues, ce qui nécessite des approches simultanées en vue d'approcher la complexité et la logique d'action des pratiques engagées.

« Les stabilités recherchées peuvent apparaître dans chaque dimension et aussi dans leur imbrication. Notons que c'est cette dernière (dimension cognitive) qui est la plus proche de la complexité des pratiques réelles, alors que toute décomposition est nécessairement « provisoire », c'est une création artificielle du chercheur » (Robert 2005, p .65).

Nous nous posons en particulier la question de savoir : **En quoi ces routines apparaissent-elles cohérentes, compatibles avec l'évolution de la composante institutionnelle liée à une réforme ?**

## II.2 Perturbations endogènes/régulations

Nous avons vu que l'identification des routines est cruciale, car elle peut nous renseigner sur la stabilité des pratiques enseignantes. Mais, nous intéressant également aux possibilités d'évolution de ces pratiques, cette fois en termes de *régulations* du savoir à enseigner, nous empruntons de façon métaphorique, le point de vue de la Théorie des Situations Didactiques, en nous interrogeant sur ce qui peut constituer un milieu de nature antagoniste pour les pratiques enseignantes et être à l'origine à de régulations dans ces pratiques. Notamment, s'agit-il d'éléments observés, « vécus » par le professeur en situations de classe ou relatifs à ces situations d'enseignement ? Ainsi comme le souligne Brousseau (1995) :

« Le travail didactique du professeur consiste essentiellement à réguler et changer des contrats didactiques de façon à maintenir des équilibres et des conditions optimales et non pas à appliquer contre vents et marées une méthode, aussi sophistiquées soit elle. » (Brousseau 1995, p.28)

Toujours suivant l'auteur, l'objet d'une régulation est de modifier un aspect de l'état d'une situation didactique pour aller vers un nouvel état afin de maintenir un équilibre entre les différentes dimensions de la relation didactique. Dans le contexte de la théorie des situations, le mot « régulation » peut prendre une signification assez large :

« L'étude des régulations consiste à chercher les grands équilibres qui doivent être conservés pour maintenir possible la relation didactique. Le repérage des fonctions se fait par leurs régulations, par l'identification des moyens de rétroaction et par les indices utilisés et la nécessité d'en établir de nouveaux. » (Brousseau 1995, p.7-8).

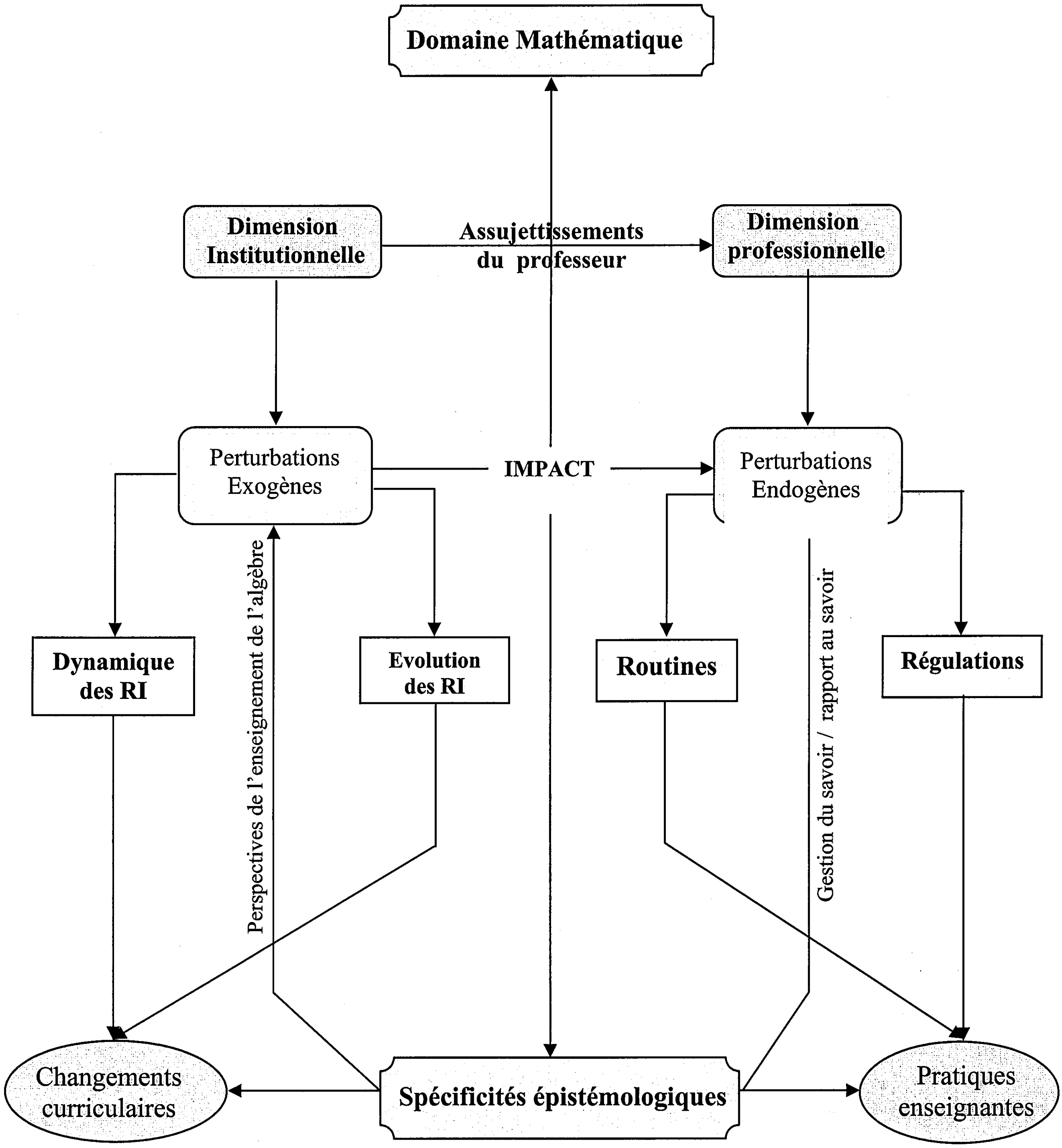
Dans la TSD, ce sont les régulations du contrat qui sont ainsi mises en avant au travers de l'action de l'enseignant et de ses négociations par rapport au savoir à enseigner et dans les interactions avec les élèves. Dans cette approche, la notion de « régulation » est vue d'emblée d'un point de vue interne au système didactique (ou endogène), centré notamment sur la « relation didactique » entre professeur, élèves et savoir.

Suivant Chevallard (2003), des régulations sont identifiées lorsque dans une routine donnée pour la pratique d'un enseignant, survient un élément de *problématicité* et qu'il est question de modifier la routine de façon à ce qu'elle traite la problématicité en question. Il reprend donc en quelque sorte l'idée première de Brousseau de *maintien d'un équilibre* de la relation didactique du point de vue de l'enseignant, en insistant sur le fait que cet effort de rééquilibration répond à un déséquilibre ou « problème » occasionné par un changement dans une pratique routinière. Ce changement apparaît, dans le cadre de la théorie anthropologique, comme conséquence d'une perturbation exogène au sein de l'institution considérée.

Ces points de vue bien qu'ils soient différents, se complètent pour donner du sens à la rationalisation de l'enseignant, les régulations considérées dans la TAD sont celles qui contraignent la formation de routines ou leurs transformations suite à une perturbation (sans doute *exogène*). De ce point de vue « régulation » est a priori indissociable d'un changement dans les « routines », changement qui comme nous l'avons vu peut se caractériser en partie par l'étude de la dimension institutionnelle (ou exogène) des pratiques.

Ainsi la caractérisation des adaptations enseignantes en termes de « régulations » des pratiques nous semble déterminante pour articuler à la fois les dimensions institutionnelle et professionnelle des pratiques. Cette notion représente pour nous un filtre d'étude pertinent de la dynamique de la dimension professionnelle des pratiques, qui peut émerger à la suite d'une réforme du curriculum.

Ainsi l'imbrication de ces différentes approches théoriques, qui s'articulent autour de l'étude des routines et régulations dans l'analyse des pratiques enseignantes, constitue pour nous un cadre de référence orientant notre propre démarche de recherche et d'analyse des résultats ,dans l'intention de répondre à l'ensemble des questions soulevées dans cette problématique.




**Plan d'étude des perturbations**
**d'un système institutionnel relativement à un domaine mathématique**

# Partie B

## Analyse institutionnelle

# Chapitre B. Analyse des programmes et des manuels de 1ère année du secondaire tunisien

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en avant la complexité des questions relatives à l'analyse des pratiques enseignantes et en particulier celles en rapport avec les « adaptations » d'enseignants expérimentés à de nouvelles exigences institutionnelles. Nous avons, en outre, évoqué un certain nombre de travaux de recherche portant sur la dimension professionnelle des pratiques et sur l'importance d'une étude de la dimension institutionnelle. Dans ce sens, nous avons souligné l'intérêt d'identifier dans cette étude les contraintes institutionnelles, qui peuvent avoir des influences sur les choix des professeurs au niveau des contenus à enseigner et des déroulements, qu'ils organisent à la suite de bouleversements induits par des changements curriculaires successifs. En effet, lorsque l'enseignant décide des contenus à enseigner, la principale référence à laquelle il est fortement lié est le programme. Celui-ci définit les attentes explicites de l'institution à propos de ces objets de savoir. Mais une part des attentes institutionnelles peuvent rester implicites et ne pas être mises clairement en avant par ces textes de savoir. Dès lors, elles sont susceptibles de ne pas être perçues par les acteurs du système. Pour cette raison et pour d'autres, le rapport développé par les professeurs au savoir à enseigner peut ne pas être idoine aux injonctions portées par une réforme. Ainsi, l'étude des rapports institutionnels et personnels aux objets algébriques s'est posée à nous par le biais de questions en rapport avec l'évolution des pratiques enseignantes. En se plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, le concept de rapport institutionnel permet de modéliser l'assujettissement de l'enseignant à l'institution scolaire dans laquelle sa pratique évolue.

L'objet de ce chapitre, est donc de mettre en évidence des implications des perturbations successives au sein des organisations de savoir mathématiques et didactiques prescrites par l'institution scolaire pour les pratiques enseignantes. Il s'agit de montrer en quoi la dimension institutionnelle des pratiques scolaires, qui fait l'objet d'une étude nourrie par la Théorie Anthropologique du Didactique en éclaire la dimension professionnelle : celle des pratiques enseignantes dans un contexte de réforme du curriculum.

Nous commençons par présenter les outils théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour aborder la dimension institutionnelle des pratiques ainsi que les matériaux de l'analyse utilisés. Nous nous référons ensuite à des travaux de recherche qui se centrent sur le domaine précis retenu pour notre étude : l'algèbre élémentaire.
Le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons et les outils d'analyse auxquels nous ferons référence, nous permettront d'analyser l'évolution du domaine d'étude à travers les réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien.

# I. Présentation des outils théoriques utilisés

## I.1 Le cadre théorique de l'approche anthropologique du didactique

Comme nous l'avons déjà évoqué, on peut décrire l'assujettissement de l'enseignant à l'institution dans laquelle il évolue relativement à un objet de savoir, en terme de rapport institutionnel (Ri (o)).

« Le rapport institutionnel Ri (0) est ce qui apparaît quand on observe le destin de O dans l'institution I vue comme une totalité (comme un système).En réalité, il existe, au sein d'une institution donnée, un système de positions P (ou de place, de topos), à chacune desquelles correspond un rapport institutionnel Ri (o). En ce rapport, s'inscrit ce que l'on fait avec O quand on est dans la position P au sein de l'institution...Ces rapports institutionnels constituent le système essentiel des conditions et des contraintes sous lesquelles se forme et évolue le rapport personnel à O des acteurs de l'institution. » (Chevallard1989, pp 213- 214)

Le rapport personnel d'un professeur à cet objet de savoir va donc se forger « sous la contrainte du rapport institutionnel » (Chevallard, 1992, p 89) à ce même objet. C'est ainsi que les différents assujettissements de l'enseignant, en tant qu'élève ou en tant que professeur soumis à des contraintes institutionnelles qui ont existé dans le passé, sont potentiellement source de « liberté » pour l'enseignant :

« Une personne X est assujettie à une foule d'institutions. Je poserai ici l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels. Ce qu'on nomme « liberté » de la personne apparaît alors comme l'effet obtenu en jouant un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres » (Chevallard, 1989, p 91).

En outre, au fil des réformes par exemple, le rapport personnel de l'enseignant à un objet institutionnel O, s'établit (s'il n'existait pas encore) ou se modifie (s'il existait déjà) sous la contrainte des rapports institutionnels à cet objet. Cette personne devient un bon sujet de l'institution relativement à O, si *la composante publique*[4] de son rapport personnel est jugée conforme au rapport institutionnel à O. D'où selon Chevallard (1989)

« Le problème central en didactique est donc celui de l'étude du rapport institutionnel, de ses conditions et de ses effets. » (p. 93).

L'analyse des praxéologies mathématiques (relatives à un objet) constitue dès lors un outil méthodologique de l'étude des rapports institutionnels à cet objet de savoir, nous rejoignons dans ce sens Bosch et Gascon pour répondre à la manière de décrire l'ensemble des contraintes institutionnelles :

« ...en considérant les praxéologies ou organisations didactiques dominantes dans l'institution considérée, c'est à dire les systèmes de types de tâches, de techniques, de technologie et de théories qui existent dans l'institution considérée et qui permettent aux sujets de l'institution de mettre en place, en les activant des organisations mathématiques déterminées sous des conditions particulières données. » (2002, p.3).

C'est dans ce sens que nous considérons les organisations praxéologiques du savoir mathématique à enseigner prescrites à différentes périodes, comme pouvant être des repères auxquels les pratiques enseignantes se réfèrent plus ou moins partiellement, de façon plus ou moins consciente pour les professeurs concernés. Nous parlerons dès lors *d'organisations mathématiques et didactiques de référence.*

**Nous émettons l'hypothèse, que les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner du passé peuvent surgir comme des alternatives envisagées par des professeurs, ou avoir des influences plus indirectes sur les pratiques enseignantes actuelles.** Une personne est quasiment toujours dans une certaine mesure, un mauvais sujet de l'institution car son rapport aux objets de savoir se forme par l'intégration au fil du temps des influences exercées par les divers rapports institutionnels auxquels elle a été assujettie. Certaines recherches portant sur les pratiques enseignantes et s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chaachoua 1997,

[4] « Tout rapport personnel apparaît comme clivé en deux composantes, rapport public et rapport privé. Lorsque le rapport personnel est examiné du point de vue de son adéquation à un rapport officiel éventuel, c'est sa composante publique qui est seule évaluée, la composante privée s'élabore à l'écart du regard de l'institution, dans la sphère privée de l'individu et, si elle sous-tend le rapport public, elle ne s'y laisse généralement pas lire à découvert. » (Chevallard 1989, p .93).

Coulange 2001) révèlent d'ailleurs des pratiques d'enseignement (d'un thème d'étude donné) contrastées, qui bien que contemporaines, se réfèrent à des périodes scolaires antérieures, par exemple :

« L'étude du rapport institutionnel aux objets systèmes d'équations et mise en équations dans les classes de troisième à d'autres moments peut également nous renseigner sur d'autres systèmes de contraintes institutionnelles ayant existé et éventuellement connus ou vécus par certains enseignants, qui peuvent se constituer en choix possibles d'enseignement. » (Coulange 2000, p.73).

Notre questionnement initial, formulé en termes de caractérisation de la dimension institutionnelle des pratiques, de description des rapports institutionnels à des objets de savoir, se situe ainsi dans le cadre de la perspective anthropologique .Mais pour le travailler, il nous a paru essentiel de faire appel à de nombreux travaux menés en didactique de l'algèbre, au-delà de la seule approche anthropologique. (Mercier, 1995). Nous faisons ainsi référence à certaines recherches, (Bednarz, Kieran, Lee 1996, Douady, 1986, Grugeon, 1997, 2004, 2008, Duval, 1993, 2004) qui nous permettront de cerner plusieurs aspects relatifs à la dimension institutionnelle des pratiques autour d'un domaine mathématique, celui de l'algèbre élémentaire.

## I.2 Des travaux en didactique de l'algèbre

Il ne s'agit pas dans cette partie de dresser un panorama des travaux existants à propos de la nature du travail algébrique, mais d'identifier quelques enjeux de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à ce niveau scolaire, pour chacun de ces enjeux, il s'agit de mettre en avant un certain nombre de points spécifiques à ce domaine et susceptibles de nous renseigner sur la nature des rapports institutionnels développés aux objets de savoir algébriques, à l'entrée au lycée. L'identification des enjeux liés à la nature du travail algébrique peut nous orienter en tant que chercheur, dans le repérage des évolutions de ce rapport au fil des réformes de l'enseignement secondaire tunisien. Ce rapport étant *clivé entre l'élève et l'enseignant,* il répartit les rôles, tâches et compétences respectifs de chacun dans l'institution. Nous avons ainsi fait le choix de prendre en compte à partir des travaux en didactique de l'algèbre certaines caractéristiques de l'enseignement de ce domaine d'étude. Ce qui nous permettra de formuler certaines hypothèses relatives à l'épistémologie de l'algèbre chez les enseignants expérimentés, compte tenu de leur vécu et de leur histoire avec ce domaine (lié à leur expérience d'enseignement, voire d'élève au sein de l'institution scolaire).

Nous nous centrons ainsi sur trois points :

- Les approches[5] d'enseignement de l'algèbre élémentaire.
- Les dimensions « outil » et « objet » de l'algèbre.
- La dimension sémiotique du travail algébrique.

### I .2.1 Les approches d'enseignement de l'algèbre élémentaire

Connaître la logique qui sous tend une réforme de l'enseignement d'un domaine revient à préciser les enjeux de son enseignement et la manière dont ils progressent au fil des époques et à fonder une réflexion sur la rationalité sous-jacente aux choix curriculaires de la réforme actuelle, en la positionnant par rapport aux réformes passées. La connaissance des perspectives d'enseignement de l'algèbre et des problématiques, qu'elles peuvent poser permet d'avoir du recul par rapport aux choix des stratégies d'enseignement de professeurs chevronnés, compte tenu à la fois de leur épistémologie du domaine et de leurs expériences antérieures.

Fruit d'une revue de la littérature de recherche et d'une analyse d'épreuves, ce paragraphe expose certains travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre (travaux anglo-saxons, travaux français...) qui démontrent la diversité des entrées possibles dans la pensée algébrique. Ces entrées peuvent se réaliser et se réalisent selon différentes perspectives d'enseignement soulignées par Bednarz, Kieran, Lee :

« The introduction of school algebra can take many different directions: the rules for transforming and solving equations (to which current teaching often reduces algebra), the solving of specific problems or classes of problems (which has played an important role historically in the development of Algebra and his teaching), the generalization of laws governing numbers ( a very strong focus on certain curricula), the more recent introduction of the concepts of variable and function (which appeared much later historically and which occupy a position of growing importance of some programs), and the study of the algebraic structures (which marked the school curriculum in the 1960s under the influence of modern mathematics).» (Bednarz, Kieran, Lee, 1996).

Les études menées dans ce sens et, encore une fois, nous ne cherchons pas une quelconque exhaustivité étant donné la diversité des travaux existants, montrent quatre perspectives d'introduction de l'algèbre dont certaines sont privilégiées actuellement dans les systèmes français et tunisiens. Une approche par la généralisation, une approche par la résolution de problèmes / mise en équation(s), une approche par la modélisation et une approche fonctionnelle et technologique. Nous explicitons brièvement les enjeux de chaque approche en mettant en avant les problèmes qu'elle peut soulever. Toutefois ces travaux s'accordent pour souligner la nécessaire

[5] Ces approches se traduiront ensuite au niveau des pratiques enseignantes par des stratégies d'enseignement du domaine ou plus particulièrement des thèmes d'études considérés.

complémentarité de ces approches pour développer une nécessaire flexibilité et adaptabilité dans l'appréhension des objets de l'algèbre, l'interprétation des lettres et des expressions dans différents modes de représentations pour en faire des usages variés.

### I .2.1.1 Une approche par la généralisation

L'objet de cette approche est de faire émerger les nombres généralisés comme préconcepts des variables et d'engager les pratiques scolaires dans l'utilisation du symbolisme pour une meilleure mémorisation des propriétés. En effet comme le souligne Chevallard (1994) « *la création du langage algébrique permet de dégager plus nettement la problématique d'étude du numérique, en la posant sans l'opposer- à côté de la perspective calculatrice* » (p 75). L'utilisation du symbolisme en algèbre et en particulier, les lettres qui désignent des quantités connues ou inconnues permettent de conserver une trace écrite des opérations réalisées et même de mettre à jour de nouvelles connaissances sur l'objet d'étude. L'algèbre utilise ainsi pleinement la valeur « monstrative » de l'expression, contrairement à l'arithmétique qui n'envisage que l'aspect calculatoire du langage numérique. Cette perspective d'enseignement permet donc d'engager les élèves dans la rationalité algébrique à travers des situations numériques ou géométriques, en particulier par la recherche de « patterns ».

Dans sa thèse, Grugeon, distingue, après avoir étudié divers travaux portant sur la rationalité mathématique (notamment ceux de Balacheff (1988), Legrand, (1990), Duval (1993), et en partant de la situation du prestidigitateur[6], trois rapports principaux à la rationalité algébrique qu'elle illustre en particulier à travers les réponses d'élèves à ce problème. L'algèbre est un outil de preuve permettant de démontrer la constance d'une certaine fonction numérique. Les réponses des élèves mettent en évidence différents rapports à cette rationalité algébrique. Par ailleurs, lorsque l'algèbre n'est pas perçue comme outil de généralisation et de preuve, et que les justifications apportées restent du côté de la rationalité quotidienne, du numérique, l'auteure parle de rationalité préscientifique : qui fait appel à des contraintes de validation plutôt que de validité, ou

[6] Dans ce problème les élèves ont placés face à la situation suivante : un prestidigitateur fait un tour assurant qu'il est sûr de gagner. Le tour consiste, un nombre quelconque étant choisi par l'élève, à faire successivement un certain nombre d'opérations arithmétiques, le prestidigitateur assurant que le résultat final sera toujours 7.

sur une vérification prenant appui sur des exemples numériques. Dans la situation proposée cela se traduit par des réponses relatives au contexte de la situation (si c'est un tour du prestidigitateur, c'est sûrement vrai). On retrouve ici le niveau des preuves pragmatiques de Balacheff, avec toute leur diversité. On retrouve aussi ce que Grugeon nomme la rationalité algébrique scientifique où l'algèbre est reconnu comme outil de généralisation et de preuve, dans un calcul algébrique scientifiquement géré. Dans la situation qu'elle propose, cela se traduit par une modélisation algébrique du problème posé a priori dans un cadre purement numérique et sa résolution via un calcul algébrique maîtrisé. Lorsque l'algèbre intervient comme outil au service de la rationalité mathématique plutôt en réponse à un contrat didactique instauré sans une réelle perception des enjeux de la modélisation algébrique, l'auteure qualifie cette rationalité de rationalité algébrique scolaire. Dans la situation évoquée, on voit ainsi plusieurs élèves introduire une lettre x pour désigner le nombre donné puis chercher l'équation qu'il doit satisfaire et se retrouvés complètement déstabilisés lorsqu'ils aboutissent après calcul exact à une identité. Dans d'autres types de tâches, les validations faisant appel à des règles d'ordre légal témoignent aussi de l'emprise de cette rationalité scolaire que le discours enseignant tend d'ailleurs à renforcer par moments. Elle peut constituer un obstacle durable à la construction d'une réelle rationalité scientifique selon de nombreuses recherches. Ainsi, selon l'auteur la rationalité algébrique considérée comme l'une des composantes de la compétence algébrique aurait pour rôle :

« ...de cerner le rapport à la rationalité mathématique mis en jeu dans l'activité algébrique aussi bien du côté élève que du côté institutionnel. En effet l'acquisition d'une compétence algébrique nous semble liée de façon incontournable avec celle d'une rationalité algébrique. » (Grugeon 1997, P.182).

On peut faire l'hypothèse que si cette rationalité algébrique n'est pas mise en avant du point de vue institutionnel au fil de l'approche concernée, elle sera rendue plus ou moins visible par les enseignants selon le rapport personnel qu'ils auront eux-mêmes développé à l'algèbre au fil de leur expérience.

### I .2.1.2 Une approche par la résolution de problèmes

L'objet de cette approche est d'engager les pratiques scolaires dans la mise en équation et la résolution des équations et de faire émerger les concepts d'inconnue et de raisonnement algébrique mais l'enjeu principal pour accéder avec cette approche au raisonnement algébrique est d'assurer au niveau de l'enseignement une rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre, ce qui n'est pas si simple, car l'enseignement n'est pas spontanément sensible aux discontinuités, ruptures et reconstructions qui accompagnent nécessairement les apprentissages (Artigue, 1998). Plusieurs travaux en didactique ont travaillé dans ce sens et ont mis en évidence les différences fondamentales entre les démarches de résolution de problèmes en arithmétique et en algèbre. En arithmétique, on part de ce que l'on connaît et l'on avance vers ce que l'on recherche, en progressant dans le connu. Cette démarche relève de la synthèse (Pappus). Par contre, en algèbre, des lettres étant choisies pour désigner les nombres cherchés, des relations sont établies entre le connu et l'inconnu, mis sur le même plan. Un traitement formel de ces relations conduit ensuite au résultat cherché. Cette démarche relève de l'analyse et suppose un changement profond des modes de pensées[7]. En outre, lors d'une résolution arithmétique, les stratégies utilisées sont souvent liées au contexte de la situation évoquée par l'énoncé. Ceci n'est plus le cas lors d'une résolution algébrique : la légitimité du traitement formel des relations produites s'appuie sur des règles de calcul algébrique, qui n'ont plus forcément de sens par rapport au contexte de départ et les calculs sont alors contrôlés par le sens interne des écritures algébriques. Il faut dans ce sens accepter en algèbre un contrôle formel et non un contrôle par le sens du problème. Or la plupart des problèmes posés aux élèves en début du secondaire ne permettent pas d'aller sans détour du connu vers l'inconnu. Ils donnent lieu à diverses techniques de résolutions arithmétiques, qui avant la réforme des mathématiques moderne, faisaient l'objet d'un enseignement explicite au moyen de procédés anciens (fausse position, partage en parties inégales, essai erreur…) « *leur objectif est clairement de mettre en avant l'algèbre comme généralisation de l'arithmétique ; dans certains de ces énoncés littéraux, cette généralisation est d'ailleurs explicite* » (Coulange 2002, p.167). Ainsi de nombreuses difficultés surgissent, liées à différents phénomènes étudiés par les chercheurs en didactique de l'algèbre, relatifs pour une part à la nature des problèmes à mettre en équation (Chevallard 1989), au rapport institutionnel développé en amont avec l'arithmétique enseignée ou par les acteurs du système (Chevallard 1989, Coulange 2002), ou aux continuités et ruptures plus ou moins visibles entre les deux domaines d'étude.

[7] Dans notre travail de DEA, nous avons amplement développé cette technique en nous référant aux travaux de Gascon (1994) et nous avons mis en évidence à partir des recherches existantes le lien entre la nature épistémologique des problèmes proposés dans l'enseignement et les démarches envisagés par les élèves pour résoudre les situations évoquées par ces problèmes.

La prise en compte de cette rupture entre les deux domaines pour ce niveau scolaire (transition au secondaire) est un point sensible qu'il nous semble important de prendre en considération dans nos analyses. Nous nous contentons d'évoquer brièvement certains résultats : les fausses continuités qui peuvent être indiquées par les statuts accordés aux lettres et à l'égalité, les discontinuités qui apparaissent au niveau de l'appréhension des objets de savoir et des modes de résolution de problèmes : lors d'une résolution arithmétique, les stratégies utilisées sont souvent attachées au contexte de la situation décrite par l'énoncé du problème. Par contre, au niveau de la résolution algébrique, la légitimité du traitement formel des relations produites prend appui sur des règles du calcul algébrique qui n'ont plus forcément de sens vis-à-vis du problème et les calculs sont dès lors contrôlés par le sens interne des écritures algébriques. C'est pourquoi il nous semble intéressant d'identifier du point de vue institutionnel, si les praxéologies mises en place pour des objets de savoir algébrique (dans notre cas les équations à deux inconnues et les systèmes d'équations) permettent de faire vivre une rupture plus ou moins raisonnable entre arithmétique et algèbre. Ainsi l'apprentissage de la résolution de problèmes qui fait l'objet des programmes d'étude des mathématiques, tant au niveau du primaire que du secondaire, et qui émane d'une volonté explicite dans tout l'enseignement de la discipline n'est pas une affaire d'apprentissage de procédures ou de techniques de résolution, c'est le travail de recherche de l'interprétation adéquate qui prime.

### I .2.1.3 Une approche par la modélisation

Chevallard a proposé dans les études qu'il a conduites, notamment sur l'enseignement de l'Algèbre[8], une théorisation de l'activité mathématiques, à l'aide de la notion de modélisation, mot dont il étend le sens qu'il a ordinairement dans l'expression « modélisation mathématique d'un système extra-mathématique » , en considérant que l'activité mathématique consiste à modéliser des systèmes qui peuvent être aussi bien mathématiques (il évoque alors le terme « mathématisé » pour désigner le système mathématique que l'on va modéliser, et du « mathématique » pour parler du modèle que

[8] Pour plus de détails, voir la trilogie d'articles dans la revue « petit x », dans les numéros suivants : petit x n°5.Le passage de l'Arithmétique à l'Algébrique dans l'enseignement des maths au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. (1985). Petit x n°19.Le passage de l'Arithmétique à l'Algébrique dans l'enseignement des maths au collège. Deuxième partie : la notion de modélisation. (1989). Petit x n°23. Le passage de l'Arithmétique à l'Algébrique dans l'enseignement des maths au collège. Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques (1989- 1990).

l'on fabrique) qu'extra mathématique (physique, chimie, biologie, économie, démographie, ...) . Dés ce moment-là, il attire l'attention sur plusieurs caractéristiques de modélisation :

- Il y a récurrence dans ce processus : un objet mathématique peut très bien, à son tour, être pris comme système, comme mathématisé.
- La relation de modélisation est réversible (à ce sujet, il cite l'exemple des équations du second degré à une inconnue et les problèmes de recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit).

Puis il introduit une distinction entre les modèles locaux et les modèles régionaux : les premiers sont ceux auxquels on a le plus souvent affaire, les seconds faisant référence à un niveau théorique. A titre d'exemple de modèle régional, il cite la géométrie, et remarque que la production d'un modèle local s'inscrit en référence à une théorie, même si cette référence n'est pas toujours explicite.

Des exemples de projets d'enseignement ont été construit en s'appuyant sur cette notion de modélisation par Gascon (1993-1995), qui permettent de montrer que la résolution de problèmes, dont on fait souvent l'essentiel de l'activité mathématique, n'est qu'un aspect de l'activité de modélisation (et n'est donc qu'un aspect de l'activité mathématique). Dans le cadre de cette approche par la modélisation, « l'objectif de l'activité mathématique est de produire des connaissances sur des systèmes (mathématiques ou extra-mathématiques) en construisant des modèles mathématiques de ces systèmes. « Les problèmes n'acquièrent du sens que dans le contexte du système étudié : les questions surgissent du système étudié, les solutions reviennent au système étudié » doivent y être rapportées. « Les modèles mathématiques ne sont pas ici le point de départ, ni le but de l'étude ; ils sont des outils de production de connaissances sur les systèmes modélisés. »(Gascon, 1995)

Dans le domaine qui nous intéresse, cette approche par la modélisation de situations en termes fonctionnels vise à faire émerger le concept de grandeur variable et à engager les pratiques scolaires dans la production de formules avec du sens.

« Algebra requires putting students in a situation that allows them to construct meaning for various representations (graphs, equations, ect.) and to use them with certain flexibility in the description and interpretation of physical phenomena or world events". (Bednarz, Kieran, Lee 1996, P.11).

Dans cette perspective d'enseignement, une grande place est accordée à la flexibilité entre les registres de représentations sémiotiques et les cadres mathématiques (plus générale que le passage de l'arithmétique à l'algèbre sous-entendu dans l'approche précédente) qui peut amener l'élève à jongler entre divers statuts des lettres, des expressions algébriques, des objets de savoir algébriques en général. Comme le souligne Chevallard, l'algèbre renoncerait à une part indispensable d'elle-même avec l'abandon conjugué de l'emploi de paramètres, de notions de formules et de fonction :

« Ce qui fait la force de l'algèbre, donc c'est ce que nous nommerions aujourd'hui l'emploi de paramètres, soit des variables du système dont les valeurs sont supposées connues.(...) L'emploi de paramètre remet à une place centrale, dés le niveau le plus élémentaire des études mathématiques , la notion de formule. Cette notion est immédiatement liée à celle de fonction (...) La fonctionnalité du calcul algébrique qu'une perspective de renouvellement curriculaires doit viser suppose ainsi, précocement, l'emploi de paramètres ; suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant leur production que leur mise en œuvre) ; et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant avec la notion de fonction. » (Chevallard 1989, p.65-66).

Cette approche fait évoluer le rapport aux objets algébriques d'un point de vue « inconnu » vers un point de vue « variable » par le sens donné aux différentes représentations (graphique, équations...) et à leur utilisation « avec flexibilité » pour décrire et interpréter des situations extra-mathématiques.

« Introducing algebra and algebraic notation through this "pattern-based approach" as a language for expressing relationships between two variables and not as a set of procedures for finding the "unknown number" is a clear break with tradition. In contrast, traditional approaches to introducing algebraic notation are based on the use of letters to stand for specific but unknown numbers. In that approach, students' first experiences are with the rules for using letters: simplifying and evaluating, writing simple expressions, and solving equations to find the unknown number. After learning how to transform expressions and solve equations, students come to deal with variables and functions and the broader notion of generality that they entail."(Stacey and Macgregor 2002, p.141-142).

Cette approche par la modélisation est également à la base de travaux visant une caractérisation des problèmes qui requièrent une modélisation algébrique. (Gascon, 1994, Janvier 1996...) .Ainsi l'une des principales difficultés à mettre en place cet enseignement est d'arriver, à travers des situations appropriées, à faire distinguer par les élèves les différentes représentations symboliques notamment dans des situations oŭ les mêmes ostensifs sont employés pour la modélisation comme le fait de distinguer entre inconnue, variable, paramètre, formule, équation...

« These difficulties are clearly shown by the author through an analysis of the meanings students give to symbolic representations and various notations on which this modeling is based. The distinctions he makes among formula, equation, unknown, variable, indeterminate value, and polyvalent noun in a symbolic expression help us to better situate the various approaches to algebra, reminding us that these distinctions cannot be determined a priori but that they are essentially linked to the student's activity. » (Bednarz, Kieran, , Lee 1996, p.10).

Cependant certains travaux (Rojano, Sutherland, 1993 ; Sutherland 1991) attestent que cette approche qui élargit le contexte de résolution de problèmes à un environnement plus dynamique en termes fonctionnels trouver du succès chez les élèves qui parviennent à interpréter les différents statuts de la lettre et que le statut de variable ne constitue pas un obstacle en lui-même pour l'apprentissage de l'algèbre. Ces constats s'accordent avec les travaux de Kieran (1996) et d'autres auteurs qui montrent les avantages d'une telle approche :

« A similar conclusion was reached by Kieran, boileau and Garançon (1996) who developed the CARAPACE program which presents unknowns within the larger context of variables. They found that students working with the program could switch easily between concepts of variables and unknown using whichever interpretation was appropriate for solving problem."( Stacey and Macgregor 2002, p.142-143).

### I .2.1.4 Une approche fonctionnelle et technologique

Les nouvelles technologies de l'information et de la communication offrent des possibilités pour développer une approche de l'enseignement de l'algèbre basée essentiellement sur les concepts de variable et de fonction introduits dans le secondaire.

Comme nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe précédent, le fait de marquer les interrelations entre fonction et équations peut avoir des effets positifs sur l'acquisition de ces deux notions et permet de négocier la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre selon de nombreux travaux. Insister sur ces interrelations dans une telle perspective curriculaire contribue dans les pratiques scolaires à passer d'une conception des équations en terme de quantités connues et de quantités inconnues à une conception en terme de variables dépendante et indépendante, soit de passer du cadre algébrique installé au niveau du collège au cadre fonctionnel nouveau en 1ère année et 2ème année secondaire. L'intérêt de cette approche réside notamment dans la flexibilité entre différents modes de représentations : tableau de nombres, représentations graphiques, symbolisme algébrique ...et l'articulation entre différents registres (par exemple en première année du secondaire, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques est peu travaillée).

« Contrary to the classical tendency in problem solving which emphasizes the setting up and solving of an equation, this approach aims at a much more general procedure for dealing with the problem, the solution being based on the previously established functional relationship. In head, the approach requires an ability to deal with real world situations using several representations (graphs, numerical, symbolic) and thinking with these. The resulting procedural representation then becomes the gateway to tables of values, Cartesian graphs, and symbolic expressions."(Bednarz, Kieran, Lee 1996, p.10).

Toutefois, cette perspective qui fait évoluer le rapport des collégiens à certaines questions algébriques ne correspond pas toujours au choix des tâches mathématiques proposées lors du travail fonctionnel, comme le souligne Chevallard (1989)

« La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les « règles » de cette manipulation sont –elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.).Cette particularité apparaîtra mieux, par contraste, dans des exemples d'emploi fonctionnel du calcul algébrique- lequel surgira massivement au lycée, rendant évident le manque d'idonéité du rapport au calcul algébrique officiellement inculqué au collège. » (Chevallard 1989, p.23).

En conclusion cette variété d'approches dans l'enseignement de l'algèbre à ce niveau scolaire nous permet de mieux appréhender la logique qui sous tend une réforme lorsqu'il s'agit d'analyser les praxéologies mises à l'œuvre et ainsi de caractériser l'évolution des rapports institutionnels développés aux objets algébriques au fil des réformes. Il s'agit d'approfondir notre réflexion sur les pratiques en examinant les fondements de chaque approche et les difficultés sous-jacentes à son application.

### I.2.2 L'algèbre dans ses dimensions « outil » et « objet ».

Un second point retenu dans l'étude de cette dimension institutionnelle des pratiques et l'évolution des rapports institutionnels à l'algèbre à travers les différentes réformes de l'enseignement secondaire tunisien est celui lié à la dialectique outil/ objet de l'algèbre. Douady, 1986 définit cette dualité de la manière suivante :

« Ainsi, nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème …Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement ».

Cette distinction permet d'organiser le travail algébrique autour de deux dimensions non indépendantes : une dimension « outil » oŭ l'algèbre est considérée comme un outil de résolution de problèmes divers intra-mathématiques ou extra-mathématiques, et une dimension « objet » ou l'algèbre est considérée comme un ensemble structuré d'objets dotés de propriétés, de modes de représentations et de traitement. La structuration de l'activité algébrique autour de ces deux dimensions et de leur interaction dialectique nous semble pouvoir outiller efficacement la réflexion nécessaire sur les fonctionnalités de l'algèbre en évitant de réduire cette dernière à une arithmétique généralisée (Gascon, 1994). Plusieurs travaux didactiques se sont appuyés sur cette distinction. Nous mettons en avant ceux de Grugeon qui caractérise les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre en définissant la notion de compétence algébrique. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions outil et objet :

- Sur le plan outil, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension outil de l'algèbre aussi bien dans des tâches de résolution que de preuve, « l'arithmétique traditionnelle » n'en n'étant qu'un parmi d'autres.
- Sur le plan objet, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et son sens. (Grugeon 1997, P .179).

Différentes recherches ont également montré la difficulté de passer d'un enseignement fondé sur la maîtrise des objets algébriques et des techniques de base (résolution d'équations, calcul littéral...) à une perspective de l'algèbre comme « outil ». L'enseignement peine à donner une réelle dimension aux activités de modélisation, ce qui explique la diversité des approches modernes d'introduction à l'algèbre qui mettent l'accent sur la dimension « outil » de l'algèbre (tout en envisageant différemment cette dimension d'une approche à l'autre).

### I.2.3 La dimension sémiotique du travail algébrique

Pour l'analyse l'évolution des rapports institutionnels à l'algèbre au fil des réformes de l'enseignement au début du secondaire, nous ferons référence à un autre aspect du travail algébrique celui des représentations sémiotiques et de la dialectique entre registres de représentation sémiotiques. « *Un registre se détermine par rapport à un système sémiotique permettant de remplir les trois fonctions cognitives fondamentales (communication, traitement et objectivation), un cadre se détermine par rapport à des objets théoriques, en l'occurrence des objets mathématique.* »*(Duval 1996, p.357)*.

Ces registres permettent de disposer d'ostensifs d'une notion ; ces ostensifs se constituent en registres, c'est-à-dire en systèmes organisés d'ostensifs liés par des

relations qui peuvent à leur tour se traduire par des ostensifs symbolique. Ainsi dans le registre des écritures fonctionnelles par exemple, des symboles qui permettent de parler de fonctions affine sont liés par exemple à d'autres ostensifs, par exemple, y= ax+b , ou « y en fonction de x » qui permettent de traduire des relations fonctionnelles entre variables. Or ces mêmes ostensifs peuvent aussi se retrouver dans d'autres registres comme celui des écritures algébriques ou des représentations graphiques y = ax+b servant à désigner une équation du premier degré à deux inconnues, ou à caractériser l'équation d'une droite. Dans le secondaire, l'enseignement peine en général à obtenir des élèves une distinction entre les objets nombre, équations à deux inconnues, fonction et équation de droite.
Duval note que, dans l'enseignement, les représentations sémiotiques[9] sont souvent considérées comme un simple moyen d'extérioriser des représentations mentales pour les communiquer. C'est pourquoi on ne leur octroie que peu d'importance. Or Duval montre que les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans la production de connaissances. Pour qu'une connaissance ou un savoir mathématique puisse être mis en œuvre , il est alors nécessaire , toujours selon l'auteur que le sujet dispose , non pas d'un mais de plusieurs registres de représentations (on ne peut en effet différencier un objet de sa représentation que si l'on dispose d'au moins une représentation une autre) représentation, dans un autre registre et qu'il ait acquis le coordination de ces registres, faute de quoi on observe les effets du cloisonnement entre les différents registres .

Nous ne rentrons pas dans les détails de cette théorie largement développée dans les travaux en didactique des mathématiques, nous nous centrons seulement sur les dialectiques entre registres développées dans les rapports institutionnels à des objets de savoir. Comme le souligne (Duval, 1996), la coordination entre différents registres est importante pour le fonctionnement de la pensée mathématique :

- Les changements de registres permettent des traitements de représentations sémiotiques de façon plus économique et plus puissante,

[9] « Production constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (Duval, 1993, p.35)

- D'un registre à l'autre, ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu qui sont représentés,
- La conceptualisation implique une coordination de différents registres.

Mais la coordination de différents registres n'est pas naturelle et R Duval (1993) précise « On peut observer à tous les niveaux un cloisonnement des registres de représentation chez la très grande majorité des élèves. Ceux –ci ne reconnaissent pas le même objet à travers les représentations qui en sont données dans des systèmes sémiotiques différents : l'écriture algébrique d'une relation et sa représentation graphique..., l'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale, la description d'une situation et sa mise en équation... »

Ainsi dans le cadre[10] algébrique, nous avons considéré les principaux registres de représentations sémiotiques pour les objets « équations du premier degré à deux inconnues » et « système de deux équations à deux inconnues » que nous avons mis en rapport avec les types de tâches généralement proposés aux élèves :

- Le registre du langage naturel impliqué notamment dans les tâches de modélisation.
- Le registre numérique/ arithmétique qui relève essentiellement du domaine des nombres et est impliqué dans la résolution des équations ou des systèmes d'équations par des techniques de nature arithmétique : essai erreur, substitution numérique, tâches de vérification...
- Le registre des écritures algébriques en rapport notamment avec les tâches de résolution algébrique des équations et des systèmes linéaires.
- Le registre des écritures fonctionnelles en rapport avec des tâches d'interprétation fonctionnelles d'objets algébriques (équations à deux inconnues ou systèmes...) qui peuvent se traduire par des symbolisations spécifiques propres au registres des fonctions affines.
- Le registre graphique est le registre des représentations mobilisées dans la résolution ou l'interprétation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues, d'un système linéaire ou la représentation de fonctions affines associées aux équations.

La coordination entre ces registres est l'un des enjeux majeurs des approches d'enseignement de l'algèbre qui tendent de faire évoluer les activités mathématiques

[10] Le mot « cadre » est utilisé dans l'acceptation que lui donne Douady (1984) c'est-à-dire comme « constitué des objets, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et images mentales associées à ces relations et ces objets. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement des outils comme objet du cadre. » (Douady, 1986, p. 10-11).

dans ce sens. Or cette coordination n'a rien de spontané, selon Duval elle met en jeu des phénomènes de non congruence sémantique entre la représentation de départ et celle d'arrivée qui fait souvent obstacle à la conversion :

« On peut enregistrer à différents niveaux de l'apprentissage la permanence d'un cloisonnement des registres de représentations entre eux. Un facteur important de ce phénomène de cloisonnement est *la non congruence* entre une représentation à convertir et la représentation correspondante dans le registre choisi. ...« Lorsqu'il y a congruence entre la représentation d'arrivée, la conversion est triviale et pourrait presque être considérée, intuitivement, comme un simple codage. Mais lorsqu'il n'y a pas congruence non seulement la conversion devient coûteuse en temps de traitement mais elle peut créer un problème devant lequel le sujet se sent désarmé. Alors la possibilité d'une conversion ne vient plus à l'esprit. » (Duval 1996, p.365).

Ce problème de conversion est particulièrement sensible dans la résolution de problème l'algèbre intervenant comme outil Duval s'interroge dans ce sens « *Mais cela ne reviendrait-il pas à renforcer les difficultés de l'apprentissage de l'algèbre quand les problèmes posés impliquent des énoncés et que l'on connaît les difficultés de beaucoup d'élèves même au lycée, à traduire un énoncé en écriture littérale ?* »

Ainsi, certaines difficultés dans l'enseignement à installer des dialectiques entre registre du langage naturel et registre des écritures algébriques peuvent entre autres s'expliquer par des phénomènes de non congruence sémantique.

« La conversion d'un énoncé en une équation, ou en un système d'équations, et la conversion inverse, c'est-à-dire la description en « langage » ordinaire de l'équation ou du système, ne se retrouvent que rarement et de manière accidentelle. Cela tient au fait que la « traduction » de l'énoncé se heurte très souvent à d'importants phénomènes de non congruence, que l'enseignant évite instinctivement quand il explique, c'est-à-dire quand il fait la conversion inverse. D'où le quiproquo entre enseignant et élèves. Ils sont sur la même ligne, mais ils ne prennent pas le même train et surtout ils ne le prennent pas dans la même direction. » (Duval 2000, p.92).

Par exemple, ces difficultés de conversion entre registres peuvent aussi se retrouver au sein du traitement dans le registres des écritures algébriques ou celui des représentations graphiques mais c'est le passage de l'un à l'autre qui est rendu encore plus délicat dans l'enseignement notamment lorsque les types de tâches proposés sont généralement réduits à une démarche de « pointage » :

« Rien que pour les droites, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations ne semble pas établi même après un enseignement des fonctions affines. La raison profonde de ces difficultés n'est pas à chercher dans les concepts mathématiques liés aux fonctions affines, mais dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique. » (Duval, 1998, p235).

En effet, cette dialectique algébrique/ graphique fonctionne en double sens :

Algébrique $\longleftrightarrow$ Graphique pour ce qui est des fonctions de référence (linéaires et affines) ; mais elle ne fonctionne que dans le sens algébrique $\longrightarrow$ graphique pour les autres fonctions, ainsi que le pointe Duval (Duval 1994). Ceci s'explique par le fait qu'un graphique n'est le représentant que d'une classe de fonctions, et non pas d'une fonction unique.

En conclusion de cette partie , par rapport au travail de Duval évoqué ci-dessus, il est important de noter une différence significative avec la notion d'ostensifs développé par Chevallard (Bosch et Chevallard, 1996,1999) : Duval considère les objets mathématiques comme données a priori et donc le travail sur ces objets dépend des connaissances du sujet, en particulier dans le traitement et la conversion, Bosch et Chevallard, le lien entre deux registres de représentation dépend d'une organisation praxéologique locale des mathématiques , laquelle est installée ou non dans l'institution qui suggère la tâche de conversion , elle n'est plus laissée à seule charge du sujet .En ce sens , il existe des ostensifs servant à l'organisation d'autres ostensifs, ou au passage entre ostensifs.

Mais quoi qu'il en soit la prise en compte de ces aspects sémiotiques dans les rapports institutionnels développés autours des objets algébriques peut nous renseigner sur les visées des différentes approches d'enseignements de l'algèbre au fil des réformes. Elle permet selon nous de pointer des caractéristiques des organisations mathématiques et didactiques développées par l'institution tunisienne au cours des deux dernières réformes de l'enseignement secondaire pour le niveau de la première année. Nous y reviendrons.

## II. Matériaux et méthodologie d'analyse

Dans ce paragraphe, nous présentons les dispositifs matériels que nous avons utilisés pour étudier la dimension institutionnelle des pratiques ainsi que la méthodologie choisie. Nous nous sommes d'abord référés aux programmes officiels du secondaire tunisien), ces programmes désignent les objets de savoir à enseigner, découpent et organisent ces objets selon le niveau scolaire. Ils définissent ainsi les attentes institutionnelles à propos d'objets de savoir (algébriques). Ils constituent en quelque sorte un cadre pour un hypothétique texte de savoir. Pour les besoins de l'analyse, l'étude de ces programmes sera parfois illustrée par des extraits du manuel officiel correspondant. Soulignons que nous disposons pour chaque période d'enseignement d'un ouvrage scolaire unique : le manuel officiel tunisien, qui s'avère dans tous les cas la principale référence « à suivre » pour les enseignants, si ce n'est la seule.[11]

« Le manuel peut en effet être révélateur, à plus d'un titre, des options didactiques d'une époque ou de celles plus spécifiques d'auteurs particuliers. » (Assude et Margolinas, 2004, p. 4).

Nous considérons cinq réformes successives de l'enseignement tunisien qui nous ont paru révélatrices de logiques différentes et de changements importants.

Tout comme Coulange (2000) et d'autres auteurs avant elle, nous considérons que :

« L'étude de l'histoire de l'enseignement peut nous servir de « promontoire » pour mieux observer, comprendre et interroger les processus didactiques de la période contemporaine, en nous prévenant contre une éventuelle illusion de transparence. » (Coulange 2000, p.72).

La prise en compte de ces différentes périodes paraît cruciale pour ce volet de la recherche pour apporter des éléments de réponses aux questions centrales :

- **Quelle est l'évolution de l'enseignement de l'algèbre à l'entrée au secondaire tunisien ?**
- **Quels sont les principaux enjeux d'enseignement du domaine considéré ?**
- **Quels changements peuvent être considérés comme l'écho de perturbations exogènes du système institutionnel ?**

Nous considérons, en accord avec Assude (2004), que ces changements font l'objet de réflexions sur les raisons et les manifestations du changement. Ils peuvent également nous renseigner sur certains phénomènes qui peuvent apparaître au niveau des pratiques enseignantes et qui peuvent être en lien avec les effets de ces changements plus ou moins perçus par les enseignants

« Les changements curriculaires peuvent être pris au double sens de l'acte de changer et de l'état qui résulte de cet acte. Le premier sens correspond à des questions comme : pourquoi change-t-on ? Que change-t-on ? Comment change-t-on ? Questions qui se rapportent aux raisons d'être, aux objets et aux formes du changement. Le deuxième sens répond à des questions comme : les effets attendus des changements ont-il été observés ? Y a t- il d'autres effets inattendus ? Questions qui correspondent aux résultats aux effets du changement. » (Assude, 2004, p. 324).

Les programmes et les manuels officiels peuvent être considérés comme des outils d'analyse permettant d'étudier le processus de transposition didactique interne du savoir à enseigner au savoir effectivement enseigné compte tenu de l'histoire de l'enseignement du domaine d'étude ou des objets de savoir.

[11] L'unicité du manuel tunisien joue sans doute un rôle important qu'il serait intéressant d'analyser. Les pratiques des enseignants ne se référant sans doute pas à d'autres mises en texte du savoir à enseigner que le manuel officiel actuel ou des manuels plus anciens. En quoi cela joue-t-il sur les marges de manœuvre des enseignants ?

« L'étude de la transposition didactique appelle, le plus souvent, celle de l'histoire de l'enseignement d'un domaine donné des mathématiques. Les matériaux à disposition ne permettent pas le plus souvent, d'avoir accès à l'enseignement effectif des époques anciennes. Les manuels scolaires peuvent renseigner sur un élément qui est intermédiaire entre la prescription officielle (les programmes officiels) et les pratiques effectives des professeurs ... Ainsi le manuel, dans de nombreux travaux en didactique des mathématiques, est un outil pour analyser le curriculum et les processus de transposition didactique. » (Assude et Margolinas, 2004, p. 2).

Pour analyser les évolutions du curriculum officiel au sein de l'institution considérée, nous utilisons deux échelles d'analyse. La première est une analyse à l'échelle du domaine d'étude : l'algèbre élémentaire (échelle globale). Elle concerne les changements dans les organisations de savoir mathématique à enseigner et les organisations de l'étude prescrites par l'institution scolaire tunisienne. Nous commençons par décrire le rapport institutionnel à l'algèbre dominant pour chaque réforme de l'enseignement tunisien à partir des programmes et des organisations mathématiques régionales et globales mises en place : partant du domaine d'étude puis rentrant plus avant dans l'étude des secteurs, thèmes et sujets d'études en nous interrogeant plus particulièrement sur l'évolution des niveaux de détermination mathématique au sein du domaine concerné.

En d'autres termes, nous nous posons des questions sur les transformations du contexte institutionnel et de l'organisation des savoirs en jeu (par exemple le cloisonnement ou l'imbrication des sujets ou thèmes d'étude au sein du domaine).

| | |
|---|---|
| **Civilisation** | Niveau -3 |
| **Société** | Niveau -2 |
| **École** | Niveau -1 |
| **Pédagogie** | Niveau 0 |
| **Discipline d'études : Mathématiques** | Niveau 1 |
| **Domaine d'études : Algèbre** | Niveau 2 |
| **Secteur d'études : Equations du premier degré** | Niveau 3 |
| **Thèmes d'études : Equations du premier degré à deux inconnues et Systèmes de deux équations à deux inconnues** | Niveau 4 |
| **Sujets d'études : Résolution des équations, résolution de systèmes d'équations, mise en équation(s).** | Niveau 5 |

La deuxième est une échelle d'analyse plus locale. Nous nous y centrons sur les deux thèmes d'étude « équations et systèmes d'équations » déjà évoqués et nous étudions les parties concernées du manuel officiel correspondant à chaque époque, à travers les organisations mathématiques qu'elles donnent à voir autour des objets « équations à deux inconnues » et « systèmes linéaires ».

Nous essaierons ainsi d'apporter des éléments de réponse à l'ensemble des questions suivantes, en imbriquant les différentes approches théoriques citées:

***Du point de vue des organisations mathématiques à enseigner et des registres convoqués :***

- **Comment sont introduites les notions d'équation à deux inconnues et de système d'équations ? Comment leurs dimensions « objet » et « outil » de résolution de problèmes sont-elles appréhendées ? Quels sont les registres choisis de préférence à cet effet ?**
- **Quelle est la place de la modélisation et de la résolution de problèmes (notamment au travers d'un enseignement dédié à la mise en équation(s)) ?**
- **Comment est pensée l'utilisation des registres ? Y a t-il des registres privilégiés ? De quelles manières sont ils sollicités ? Quels liens apparaissent entre les différents registres ?**
- **Quelles sont les techniques de résolution des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations développées ?**
- **Comment est interrogée la dialectique ancien/nouveau du processus d'enseignement–apprentissage ? Y a t-il une dynamique apparente des savoirs algébriques en jeu ?**

***Du point de vue des organisations didactiques :***

**-Quels types d'organisations didactiques accompagnent la mise en place des différentes organisations mathématiques à enseigner autour des équations et des systèmes d'équations (organisation globale des différents moments de l'étude) ?**

**-Quelles initiatives ou marges de manœuvre pour l'enseignant apparaissent inhérentes à ces organisations didactiques ?**

Concrètement, les époques considérées dans cette étude correspondent à des réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien :

La réforme de 1958 : La période « classique » (Programmes de 1958- 1968)

La réforme de 1968 : La période de la « réforme » des mathématiques modernes (1968-1978)

La réforme de 1978 : La période de la « contre-réforme » (Programmes de 1978-1991)

La réforme de 1991 : La période « contemporaine» (Programmes1991-2002)

La réforme de 2002 : La période de la réforme « moderne ».

# III. Analyse des programmes et des manuels officiels

## III.1 La période Classique (Programmes des années 1958 - 1968)

### III.1.1 Présentation du contexte institutionnel et de l'organisation du domaine de l'algèbre enseignée

Avant 1958, les programmes français conçus en 1945 étaient enseignés en Tunisie (Kachoukh, 1986). La réforme de l'enseignement de 1958, aboutissant à la mise en place de programmes en 1959, avait pour principal objectif la scolarisation totale des enfants âgés de 6 ans, prévue pour 1966-1967 (Ayachi, 1986). On peut voir dans cette réforme, la volonté d'afficher l'autonomie nouvelle du système scolaire tunisien. Elle est également caractérisée par l'importance accordée à la nécessité de développer l'esprit d'analyse et de synthèse de l'élève et de le faire participer à la construction de son savoir. Les textes d'orientation concernant l'enseignement des mathématiques au secondaire[12] stipulent de présenter dans les premières années du tronc commun, un enseignement accessible à la majorité des élèves. Ceci en vue de permettre aux élèves d'affronter avec efficacité et assurance les problèmes scientifiques ou de la vie courante

[12] L'enseignement secondaire à cette époque s'étale sur une période de sept ans, les trois premières années correspondent au tronc commun (qui équivaut actuellement au second cycle de l'enseignement de base, autrement dit, aux années du collège). L'orientation vers les différentes filières a lieu à la fin de la 3ème année et, à partir de la 4ème année, commence l'enseignement spécialisé pour chaque branche d'enseignement.

et de cultiver chez eux certaines qualités comme la précision, la méthode, la probité et la correction du langage.

On retrouve dans le discours des concepteurs, une importance accordée à la « réalité » à travers une idéologie du « rapport au concret ».

« Par cet enseignement, on cherchera à éveiller chez lui cette activité mentale qui lui permettra d'affronter avec efficacité et assurance les problèmes scientifiques ou de la vie courante, qui se poseront à lui, à cultiver certaines qualités comme la précision, la méthode, la probité intellectuelle, la correction du langage. » (Programme officiel 1959).

Les directives officielles mettent particulièrement l'accent sur l'enseignement des domaines de l'algèbre et de l'analyse comme fondement pour la recherche mathématique:

« Si la géométrie reste le stimulant par excellence de l'esprit de recherche et de l'intuition, l'expérience montre que seule une faible proportion d'élèves spécialement doués y réussit. Cependant l'algèbre et l'analyse constituent les éléments de base dans la recherche mathématique moderne et sont plus facilement accessibles à la majorité des élèves. » (Ibid.)

En quatrième année (toutes sections), ce qui correspond actuellement à la première année du secondaire tunisien, le programme est scindé en deux domaines intitulés « Algèbre » et « Géométrie et trigonométrique ». La partie du programme consacrée à « l'algèbre » comprend quatre secteurs subdivisés à leur tour en thèmes d'études comme il est précisé dans le tableau suivant :

| **Secteurs d'étude** | Opérations et calculs | Variable et fonctions | Equations | Inéquations |
|---|---|---|---|---|
| **Thèmes d'étude** | - Définitions et propriétés des opérations portant sur les nombres entiers, fractionnaires, rapport proportions, racine carrée, propriétés élémentaires des radicaux et relatifs.<br>-Rappel sur les monômes et polynômes. | -Rappels des définitions de variable et de fonction.<br>-Fonction d'une variable, fonction croissante, décroissante dans un intervalle.<br>-Etude des variations des fonctions y = m x ; y = m x +p ; $y = x^2$, $y = \frac{a}{x}$<br>-Représentations graphiques en coordonnées rectangulaires de ces fonctions. | -Equation du premier degré à une inconnue Equation du premier degré à deux inconnues.<br>-Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues. Discussion.<br>-Equation du deuxième degré à une inconnue, existence et calcul des racines.<br>-Problèmes conduisant à des équations du premier ou du deuxième degré. | -Etude du signe du binôme du premier degré à une variable Inéquations du premier degré.<br>-Etude du signe du trinôme du second degré à une variable, inéquations du 2ème degré.<br>-Position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré.<br>-Problèmes conduisant à des inéquations du premier ou du deuxième degré. |

La notion d'équation apparaît ainsi pour la première fois conjointement avec la notion d'inéquation en troisième année, à la suite de la notion de variable et de l'étude des polynômes. Bien que la notion de « fonction » fasse officiellement partie du domaine de l'algèbre, celle-ci et les équations à plusieurs inconnues sont introduites dans deux parties séparées et successives après la notion de « variable ». Le processus d'enseignement des fonctions linéaires et des fonctions affines se fait apparemment selon une approche essentiellement graphique : repérage d'un point dans le plan, notion d'équation d'une courbe, équation de la droite, intersection de droites ... L'objectif de l'enseignement semble viser explicitement l'exploitation du cadre graphique. L'ensemble de ce travail graphique est supporté par un travail mathématique conséquent mené auparavant sur les relations de proportionnalité des grandeurs : une véritable théorie des rapports entre grandeurs numériques est enseignée.

On peut donc penser que toutes ces notions mathématiques nourrissent visiblement un travail de modélisation de situations concrètes : ainsi les fonctions linéaires et affines modélisent des situations « cinématiques » de mouvement uniforme, ou d'écoulement de liquides...

Par ailleurs, nous soulignons le fait que nous ne disposons pas du manuel correspondant à cette époque. Nous ne pouvons donc pas faire une analyse des chapitres en rapport avec les thèmes retenus pour notre recherche. Nous nous contenterons seulement de préciser certaines caractéristiques de l'algèbre enseignée à l'époque sur la base du programme officiel et des informations obtenues en interrogeant certains enseignants qui ont bien voulu nous renseigner sur certains aspects de leur formation à l'époque.

Il semblerait donc que, pendant cette période, l'arithmétique élémentaire occupait une place importante dans l'enseignement des mathématiques avec des équations qui viennent s'inscrire en concurrence des techniques arithmétiques de résolution d'un corpus de problèmes concrets mobilisant des formules, dans des contextes de mélange, d'argent, d'intérêt, et des problèmes géométriques faisant essentiellement appel au cadre des grandeurs. Ces caractéristiques de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à cette époque rejoignent sur de nombreux points les spécificités de la période classique en France mises en avant par Coulange (2000) :

« Au sein du courant « algèbre élémentaire », l'articulation arithmétique/algèbre enseignée leur fournit une niche confortable. On constate la présence importante d'énoncés concrets traditionnels au sein de l'arithmétique enseignée au début du secondaire : leur mise en équations fait intervenir des formules du corpus arithmétique et des conversions de mesure : problèmes d'alliage, de mélange, d'escompte et d'intérêt... Cette présence alimente le discours sur la concurrence entre algèbre et arithmétique. » (Coulange, 2001, p.167).

Les organisations mathématiques mises à l'étude durant cette période semblent accorder une importance à une approche de l'algèbre élémentaire qui reste tout de même essentiellement « équationnelle », ce qu'on voit d'ailleurs assez nettement dans l'étiquetage même du secteur dédié aux fonctions.

Du point de vue des organisations didactiques, soulignons la structure apparemment binaire de l'étude : « cours » et « exercices ». Avec une répartition des responsabilités didactiques stable et établie : c'est l'enseignant qui fait la théorie et l'élève qui l'applique à travers les applications proposées.

## III.2 La période de la « réforme » des mathématiques modernes (Programmes des années 1970)

### III.2.1 Présentation du contexte institutionnel et de l'organisation du domaine de l'algèbre enseignée

En Tunisie comme en France, le mouvement des mathématiques modernes s'est développé dans un contexte épistémologique particulier qu'illustre bien la citation suivante :

« Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites - les structures mathématiques ; et il se trouve - sans que l'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ses formes ; comme par une sorte de préadaptation. » [Nicolas Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », 1947].

Dans cette citation, qui n'est pas particulière aux contextes tunisien ou français, Bourbaki expose deux idées, la première : le rôle nouveau, central que joue la notion de structure dans les mathématiques, devenant le noyau de ce qui est alors appelé les « mathématiques modernes », la seconde étant la surprenante efficacité de telles mathématiques pour rendre compte de la réalité, ce qui devient un des arguments les plus utilisés pour défendre la nécessité de la réforme dite des mathématiques modernes. Cette réforme a abouti à un changement important dans les programmes tunisiens. Ainsi, dans les directives du programme de 1970, les notions traditionnellement qualifiées de pratiques et de concrètes sont remises en question (Tunisie, 1970). Dès les premières années de l'enseignement secondaire, une nette tendance vers l'abstraction est privilégiée, le but étant d'amener les élèves à la notion fondamentale de structure, dès la fin du premier cycle.

En quatrième année (toutes sections), ce qui correspond actuellement rappelons-le à la première année du secondaire, l'enseignement de l'algèbre rejoint la partie du programme intitulée «Algèbre et analyse » qui est constituée de trois secteurs d'étude : Structures (anneaux, corps, espaces vectoriels), les nombres, et les fonctions réparties à leur tour en thèmes d'étude :

| **Secteurs d'étude** | Structures | Les nombres | Les fonctions |
|---|---|---|---|
| **Thèmes d'étude** | Anneaux, corps, espaces vectoriels. | Rappels sur les ensembles N, Z, Q et IR et les opérations qui y sont définies. | Fonctions numériques d'une variable réelle. conçues comme une application d'une partie de IR dans IR.<br>Fonctions polynômes.<br>Fonctions rationnelles.<br>Fonction linéaire et fonction affine.<br>Représentation graphique.<br>Equation et inéquations.<br>Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues. |

Le rôle de l'enseignement de l'algèbre élémentaire est ainsi « perturbé » : les équations algébriques se retrouvent au second plan et en liaison avec la structure de l'ensemble numérique dans lequel elles interviennent :

« La révolution des équations et inéquations est intimement liée à la structure de l'ensemble numérique dans lequel on opère ; il est donc impératif d'accorder à cette structure le processus logique qui conduit aux solutions » (Programme officiel, 1970).

Il est intéressant de voir à travers le discours émanant des concepteurs de programmes à l'époque les bouleversements induits par l'introduction des équations en tant qu' « objet » d'algèbre « moderne » sur les justifications sous-jacentes à la résolution :

« La notion d'équation (comme celle d'inéquation) pose un problème nouveau, l'égalité conditionnelle envisagée apparaît comme la traduction symbolique d'un énoncé dont la signification parfaitement claire au départ ne doit jamais s'estomper. La résolution d'une équation ne doit en aucun cas devenir ce jeu amusant mais stérile de déchiffrement à l'un ( ?) d'un code déterminé. On brisera systématiquement les mécanismes qui ont tendance à se créer dans la mesure où ils empiètent sur la réflexion, dispensent de l'effort et engourdissent l'intelligence. Pour cela on commencera par éliminer les mots, expressions ou tournures de phrases par lesquelles les mathématiques dégénèrent en recettes. » (Programme officiel, 1970).

Par ailleurs, en comparaison avec la réforme précédente (ou de ce que nous pouvons en penser sur la base d'un matériau restreint), on remarque que, l'ordre des thèmes équations et fonctions est explicitement inversé et que ces deux thèmes s'articulent d'une toute autre manière : les fonctions préparent tout un arrière-plan théorique permettant de justifier la notion d'équivalence des équations.

« S'il est difficile de définir correctement à ce niveau la notion d'équations équivalentes, il est encore plus difficile de s'en passer, cette notion sera simplement introduite en indiquant qu'elle sera précisée ultérieurement. Elle permettra d'éviter l'écueil du formalisme qui fait apparaître une racine comme le terme ultime d'un rite opératoire. » (Ibid. p .26).

Ainsi comme le souligne Coulange en référence aux travaux de Chevallard (1995, p. 62-63) sur l'enseignement de l'algèbre à cette époque *« Les parties traditionnelles sont bien intégrées dans l'algèbre moderne ainsi présentée. Mais elles n'en constituent ni l'essentiel, ni surtout les débuts. ....Le traitement des équations algébriques se trouve-t-il rejeté fort loin dans l'exposé moderne de l'algèbre » (Coulange, 2000, p.114).*

Les « équations et systèmes d'équations» sont donc introduits dans un contexte ensembliste, et leur introduction s'accompagne d'un important discours technologico-théorique s'appuyant sur les notions de fonction/application. L'étude du manuel correspondant permettra de mettre en avant certaines caractéristiques spécifiques à l'enseignement de ces deux thèmes.

## III.2.2 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Equations du premier degré à deux inconnues »

***Une approche par les ensembles***

Dans le manuel officiel (1978), les équations du premier degré à deux inconnues sont d'abord introduites dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ puis le domaine de résolution s'étend à l'ensemble des réels $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Un discours d'ordre théorique qui met en avant les notions de couple de nombres, d'ensemble, de produit cartésien d'ensembles et de fonction constitue tout un plan d'introduction de ce type d'équation. Les équations à deux inconnues apparaissent ainsi, sous couvert d'une étude théorique des ensembles comme réponse à la question : « Peut-on trouver les couples d'entiers naturels $(x, y)$ tels que $f(x, y) = c$ ?

En effet, dans cette partie, les fonctions à deux variables sont au centre de l'étude et les objets principaux de cette étude sont des couples de nombres et des ensembles. Autour de ces notions apparaît tout un ensemble d'objets comme ceux de couples d'entiers, couples de réels, ensemble produit, ensemble de solutions, etc. C'est autour de ces objets qu'on doit s'attendre à voir apparaître l'objet « équation à deux inconnues », objets avec lesquels il va y avoir des interrelations étroites. Une première observation est que les notions de couple de nombres, d'ensemble et d'intersection d'ensembles apparaissent comme des éléments (objets) indispensables à l'environnement des équations et aux systèmes d'équations. Voyons comment ceci se manifeste.

**I- Equations dans IN $\times$ IN**

**A- Couple d'entiers naturels**

Vous avez dans votre poche uniquement des pièces de 5 millimes et des pièces de 1 millime. Tirez quelques pièces et comptez d'abord les pièces de 5 M puis les pièces de 1M.
Si vous trouvez 7 pièces de 5M et 4 pièces de 1M, vous représenterez ce résultat par l'écriture (7 ; 4)
Ainsi, l'écriture (9 ; 12) signifie que nous avons 9 pièces de 5M et 12 pièces de 1M.
(12 ; 9) Signifie que nous avons ...
(3 ; 3) Signifie que nous avons ...
(5 ; 0) Signifie que nous avons ...
Chacune des écritures (7 ; 4), (9 ; 12), (12 ; 9), (3;3) s'appelle un couple d'entiers naturels.

**Retenons :**

a et b étant deux entiers naturels.
(a ; b) est un couple d'entiers naturels.
a est la 1ère composante du couple (a ; b).
b est la 2ème composante du couple (a ; b).
Tous les couples d'entiers naturels forment un ensemble noté IN $\times$ IN
(IN $\times$ N se lit IN Croix IN)

**Représentation**

Pour représenter les couples d'entiers naturels, nous utilisons un quadrillage droit formé de carrés, considérons les points qui sont des sommets de ces carrés, chaque couple d'entiers naturels est représenté par un de ces points et un seul.

***Une introduction comme « objet »***

Le plan théorique apparent sur lequel se greffe la notion d'équation à deux inconnues est celui des fonctions. En s'appuyant sur les notions ensemblistes, les fonctions de IN $\times$ IN dans IN permettent de structurer, de la manière suivante, le discours technologico-théorique qui vise à présenter les équations à deux inconnues entières comme une réponse à la question « Peut-on trouver les couples d'entiers naturels (x, y) tels que

f(x, y) = C?

**B- Fonctions de IN $\times$ IN dans IN**

Soit (x , y) un couple d'entiers naturels. La somme correspondante en millimes est l'entier naturel 5x +y.
A chaque couple d'entiers naturels (x, y) correspond l'entier naturel 5x +y.
Le procédé qui permet de passer du couple d'entiers naturels (x, y) à l'entier naturel 5x +y définit une fonction de IN $\times$ IN dans IN.
Désignons par f cette fonction

$$f : IN \times IN \longrightarrow IN$$
$$(x, y) \longmapsto 5x + y$$

**C- Equation dans IN $\times$ IN**

Nous nous proposons de trouver les tirages qui donnent une somme en millimes égale à 20.
Le problème posé est le suivant :
**Peut-on trouver les couples d'entiers naturels (x, y) tels que f(x, y) = 20 ?**
Ceci revient à dire : Soit dans IN $\times$ IN, l'équation f(x, y) = 20.

Les notions de couple et de produit cartésien d'ensembles IR $\times$ IR servent ensuite de jalons pour introduire les équations à deux inconnues réelles par une extension du domaine des nombres. Les ostensifs associés sont utilisés aussi bien dans le registre numérique que dans le registre graphique : la notion de couple de nombres est d'abord institutionnalisée dans un contexte ensembliste, puis rattachée aux coordonnées d'un point dans le plan. Cette articulation fait apparaître cet objet au sein d'une dialectique ancien- nouveau.

**II- Equations dans IR × IR**
**A- L'ensemble IR × IR**
x et y étant deux nombres réels.
(x , y) est un couple d'entiers naturels.
x est la 1ère composante du couple (x , y).
y est la 2ème composante du couple (x , y).
Tous les couples de nombres réels forment un ensemble noté IR × IR.
**Représentation**
Traçons, dans un plan, deux droites perpendiculaires en O. Graduons ces deux droites en prenant pour origine le point O et en choisissant la même unité, chaque couple de nombres réels (x , y) est représenté par un point M du plan et un seul.
Chaque point M du plan représente un couple de nombres réels (x, y) et un seul.
Les composantes du couple (x, y) s'appellent les coordonnées du point M.
x est l'abscisse du point M.
y est l'ordonnée du point M.
**B- Equations dans IR × IR**
Soit f une fonction polynôme de IR x IR dans IR et soit m un nombre réel.
Considérons dans IR x IR l'équation f(x, y) =m.
Le couple de réels (α, β) est une solution de l'équation f(x,y) = m signifie f(α , β) = m.
Le couple de réels (a, b) n'est pas une solution de l'équation f(x,y) = m signifie f(a , b) ≠ m.
Soient a et b deux réels tels que l'un d'eux au moins est différent de 0.
Considérons la fonction f : IR × IR ⟶ IR
$(x, y) \longmapsto ax + by$
Soit, dans IR × IR, l'équation a x+by = c où c est un nombre réel.
Cette équation est appelée équation du premier degré à deux inconnues.

***<u>L'accent mis sur les techniques de résolution algébrique</u>***

### Présentation des trois cas d'ensembles de solutions

A la suite de l'introduction précise des équations à deux inconnues réelles, les auteurs du manuel abordent le type de tâche « résolution algébrique » en mettant en avant de manière explicite les différents cas d'ensembles de solutions en tirant profit des notions ensemblistes précédemment définis. Cette technique qui apparaît « forte » au sein de l'organisation mathématique à enseigner est accompagnée d'une interprétation de l'ensemble des solutions correspondant dans le registre graphique.

**B- Solution d'une équation du 1er degré à deux inconnues**
Soit, dans IR × IR, l'équation du premier degré à deux inconnues a x+b y = c. L'un au moins des réels a et b est différent de 0.
**<u>1er cas</u>** : a≠0 et b≠0
Pour trouver un couple de réels (α, β) solution de cette équation, nous pouvons :
- Soit choisir α et calculer β.
- Soit choisir β et calculer α.

L'équation a une <u>infinité</u> de solutions.
Nous admettons que l'ensemble des points qui représentent ces solutions est une droite.
**<u>2ème cas</u>** : a≠0 et b=0
Nous avons, dans IR × IR, l'équation a x = c, un couple de réels (α, β) est une solution de cette équation signifie aα = c, c'est-à-dire α = c/a.

Chaque couple de réels, solution de cette équation, a

- pour 1ère composante le nombre réel c/a.
- pour 2ème composante un nombre réel quelconque.

L'équation a une infinité de solutions.

L'ensemble des points qui représentent ces solutions est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

**3ème cas** : a=0 et b≠0

Nous avons, dans IR × IR, l'équation by = c, un couple de réels (α, β) est une solution de cette équation signifie bβ = c, c'est-à-dire β = c/b.

Chaque couple de réels une solution de cette équation a

- pour 1ère composante un nombre réel quelconque.
- pour 2ème composante. le nombre réel c/b.

L'équation a une infinité de solutions.

L'ensemble des points qui représentent ces solutions est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

## Des techniques algébriques « théorisées »

Au-delà du souci de rigueur mis en avant dans l'introduction de l'objet de savoir « équations du premier degré à deux inconnues », on peut voir à travers les extraits cités, ci-dessous, la volonté des auteurs de théoriser la résolution algébrique. Les techniques explicitées sont renforcées par un environnement technologico-théorique développé, qui reste proche du savoir mathématique savant. On va jusqu'à faire l'affirmation générale que les transformations « linéaires » d'équations conservent l'équivalence au fil d'un discours qui s'appuie toujours sur les fonctions à deux variables.

**1ère règle**

Soient f, g , h trois fonctions polynômes de IR × IR dans IR, considérons, dans IR × IR, l'équation f(x , y) = g (x , y).

Ajoutons h(x , y) à chaque membre de l'équation ; nous obtenons l'équation :

f(x , y) + h(x , y) = g (x , y) + h (x , y).

Les deux équations ont le même ensemble de solutions.

**2ème règle**

Soient f, g deux fonctions polynômes de IR × IR dans IR, et soit m un nombre réel différent de O, considérons dans IR x IR, l'équation f (x, y) = g (x, y).

- multiplions par m chaque membre de l'équation.
- nous obtenons l'équation : m. f (x, y) = m. g (x, y).

Les deux équations ont le même ensemble de solutions.

## *L'absence d'enjeu pour la technique graphique*

Si les techniques algébriques apparaissent comme un enjeu explicite mis en avant par l'ouvrage de l'époque, le type de tâche « résolution graphique » est quasiment absent. Le travail graphique fait son apparition seulement pour illustrer l'infinité des solutions d'une équation à deux inconnues, posée au moyen d'une paramétrisation des couples solutions.

Soit dans IR × IR l'équation 7x – 3y = - 4, cherchons les solutions de cette équation.

Un couple de réels (α, β) est une solution de cette équation signifie 7α – 3β = - 4.

Supposons α connu et calculons β :

-3β = -7α – 4 ; β = (-7α – 4)/-3 ; β= (7α + 4)/3.

L'équation donnée a une infinité de solutions.
Chaque solution est un couple de réels qui a
- pour 1ère composante un nombre réel $\alpha$ donné.
- pour 2ème composante le nombre réel $(7\alpha + 4)/3$.

Représentons ces solutions :
L'ensemble des points qui représentent les solutions de l'équation $7x - 3y = -4$ est une droite. Cette droite est déterminée par deux de ses points : le point P qui représente le couple (1, -1) et le point Q qui représente le couple (2 ; 6), solutions de l'équation.
L'ensemble des points qui représentent les solutions de l'équation $7x - 3y = -4$ est la droite (PQ).

### III.2.3 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues »

C'est en continuité de l'étude des équations du premier degré à deux inconnues admettant une infinité de solutions que l'objet de savoir « système d'équations » apparaît. En s'appuyant sur les notions ensemblistes de couple et d'intersection d'ensembles, les auteurs du manuel introduisent la résolution des systèmes en réponse à la question suivante :

| |
|---|
| Peut-on trouver un couple de réels $(\alpha, \beta)$ tel que $(\alpha, \beta)$ est à la fois une solution de l'équation $ax + by = c$ et une solution de l'équation $a'x + b'y = c'$ ? |

Nous dirons :
Soit, dans $IR \times IR$, le système d'équations :
$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.
Nous écrirons :
Soit, dans $IR \times IR$, le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Un couple de réels $(\alpha, \beta)$ est une solution du système signifie $(\alpha, \beta)$ est à la fois une solution de l'équation $ax + by = c$ et une solution de l'équation $a'x + b'y = c'$.
Résoudre dans $IR \times IR$ le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

C'est trouver l'ensemble des solutions de ce système.

***Une étude des trois cas d'ensembles de solutions***

A la suite de l'introduction officielle des systèmes d'équations, les auteurs du manuel donnent du sens à la résolution algébrique en mettant en avant les trois cas d'ensemble de solution. Il s'agit par des substitutions numériques de vérifier qu'un couple de nombres est solution d'un système donné.

**Exemple 1**
Soit dans $IR \times IR$ le système

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

Vérifions que le couple (1, 4) est une solution de ce système.
$(-2) \times (1) + 4 = -2 + 4 = 2$
Le couple (1, 4) est une solution de l'équation $-2x + y = 2$.

$1 - 3\times(4) = 1 - 12 = -11$
Le couple (1, 4) est une solution de l'équation $x - 3y = -11$
Donc le couple (1, 4) est une solution du système
$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$
Choisissez un autre couple de réels ; est-ce que ce couple est une solution du système donné ?

**Exemple 2**

Soit dans $IR \times IR$ le système :
$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 3x - 5y = -2 \end{cases}$$

- Vérifier que le couple (1, -2) est une solution de l'équation $3x - 5y = 13$ et qu'il n'est pas une solution de l'équation $3x - 5y = -2$
- Choisissez un couple de réels, solution de l'équation $3x - 5y = -2$ et vérifier qu'il n'est pas une solution de l'équation $3x - 5y = 13$
- Soit $(\alpha, \beta)$ un couple de réels, solution de l'une des équations.

Expliquez pourquoi ce couple n'est pas une solution de l'autre équation.
Quel est l'ensemble des solutions du système donné ?

Lorsque le système admet une infinité de solutions, les auteurs du manuel ne font pas apparaître la mise en œuvre de « nouvelles » techniques de résolution d'un système d'équations. Il s'agit pour cet exemple particulier de réinvestir ce qui a été vu pour les équations à deux inconnues, c'est-à-dire de transformer la deuxième équation pour se ramener à l'écriture de la première, et de conclure à l'équivalence des ensembles solutions de ces deux équations, puis à l'infinité de solution du système concerné :

**Exemple 3**

Soit dans $IR \times IR$ le système
$$\begin{cases} 4x + 7y = 3 \\ 8x + 14y = 6 \end{cases}$$

- Montrer que l'équation $8x + 14y = 6$ a le même ensemble de solutions que l'équation $4x + 7y = 3$.
- Expliquez pourquoi le système donné a une infinité de solutions

## ***Techniques de résolution algébrique***

Le manuel présente deux techniques algébriques pour résoudre un système d'équations donné : la technique par substitution et celle par élimination sur un exemple à coefficients numériques et admettant une solution unique. Le discours technologique du contrôle logique associé à la résolution algébrique apparaît à travers la notion d'équivalence des équations. Nous citons l'une des méthodes proposées par les auteurs :

**Résolution d'un système de deux «équations du premier degré à deux inconnues »**

Résolvons dans $IR\times IR$ le système
$-2x + 5y = 18$
$7x - 3y = -5$

**1ère Méthode**

Considérons l'une des deux équations : $-2x + 5y = 18$
D'après les règles de résolution d'une équation du 1er degré à deux inconnues, cette équation a le même ensemble de solutions que l'équation $y = (2x + 18)/5$
Le système donné a le même ensemble de solutions que le système
$y = (2x + 18)/5$
$7x - 3y = -5$

* Soit ($\alpha$ ; $\beta$) un couple de nombres réels. ($\alpha$ ; $\beta$) est une solution de ce système signifie $\beta$=( 2 $\alpha$ +18) /5 et 7 $\alpha$ - 3 $\beta$= -5.
Remplaçons $\beta$ par = (2 $\alpha$ +18) /5 dans l'égalité 7 $\alpha$ - 3 $\beta$= -5.
Multiplions par 5 chaque membre de cette égalité :
$35\alpha - 3 (2\alpha + 18) = -25$
$35\alpha - 6\alpha - 54 = -25$
$29 \alpha - 54 = -25$
$29 \alpha = 29$
$\alpha = 1$
D'où $\beta = (2\times 1 + 18)/ 5 = 20/5 = 4$
Vérifier que le couple (1 ; 4) est une solution du système donné.

Ainsi, pour les techniques de résolution algébrique d'un système d'équations, tout semble se passer comme si le discours théorique tenu sur les transformations « linéaires » d'écriture des équations à deux inconnues nourrissait également ces techniques. Les auteurs du manuel ne ressentent pas le besoin d'accompagner davantage ces techniques algébriques.

## *Une Technique graphique dévalorisée*

Le type de tâche résolution graphique occupe une place nettement moins importante que celui consacré à la résolution algébrique. Aucun graphique n'apparaît dans ce paragraphe, seule l'étude d'un système admettant une solution unique est présentée comme prolongement de l'étude des équations à deux inconnues. En outre, tout comme pour les équations à deux inconnues, le travail graphique autour de la résolution des systèmes d'équations est mené indépendamment du travail algébrique, ce qui montre un cloisonnement entre les différents registres de représentation sémiotique au sein du cadre algébrique.

L'ensemble des solutions de l'équation $-2x + 5y = 18$ est représenté par une droite ; cette droite est déterminée par deux de ses points.
Soit A le point qui représente le couple (-9,5, 0) solution de l'équation $-2x + 5y = 18$ et soit B le point qui représente le couple (-4, 2) solution de le même équation.
L'ensemble des solutions de l'équation $-2x + 5y = 18$ est représenté par (AB)
L'ensemble des solutions de l'équation $7x - 3y = -5$ est représenté par une droite ; cette droite est déterminée par deux de ses points.
Soit C le point qui représente le couple (-2, -3) solution de l'équation $7x - 3y = -5$ et soit D le point qui représente le couple (4, 11) solution de la même équation.
L'ensemble des solutions de l'équation$7x - 3y = -5$ est représenté par (CD).
Les droites (AB) et (CD) se coupent au point E ; le point E représente le couple (1, 4).
La solution du système :
$\begin{cases} -2x + 5y = 18 \\ 7x - 3y = -5 \end{cases}$ est le couple (1, 4).

## *L'absence d'enjeu d'enseignement pour la mise en équations*

Au cours de cette période, on note aussi une absence de dialectique entre l'arithmétique « élémentaire » (qui a d'ailleurs disparu de l'enseignement au niveau du secondaire) et l'algèbre enseignée : la mise en équation n'est pas un enjeu d'enseignement au sein de la partie « cours ». Seuls, trois exercices à la fin du chapitre représentent des problèmes concrets « classiques ».

**Exercices**

Deux personnes entrent dans un magasin. L'une achète une table et 4 chaises et paye 18,700D ; l'autre achète 2 tables et 12 chaises et paye 45,600D. Trouvez le prix d'achat d'une table et celui d'une chaise.

Un rectangle a pour périmètre 18cm. En augmentant sa longueur de 0,6 cm et sa largeur de 2,4cm, l'aire augmente de 16,56 $cm^2$. Trouvez les dimensions de ce rectangle.

Trouvez deux nombres a et b sachant que le quotient exact de a par b est 1,4 et que le quotient exact de (a + 3,5) par (b + 3,5) est 1,26.

Comme le souligne Coulange (2000) : « Ces réflexions autour de la disparition d'une dialectique entre arithmétique et algèbre et de la « mort » des problèmes « concrets » sont vraisemblablement symptomatiques d'une absence d'enjeux didactiques associés à la mise en équations de problèmes pendant la période de la réforme. »(Coulange 2000, p.123).

### III.2.4 Du point de vue des organisations didactiques et de leur incidence sur la topogénèse

Les organisations didactiques qui accompagnent la mise en place des organisations mathématiques développées autour de ces deux thèmes d'étude montrent des caractéristiques qui ne sont pas propres à l'enseignement de ces notions. Notons d'abord qu'il s'agit d'une organisation ternaire proche du « cours magistral » qui fait apparaître trois phases : une première phase où l'objet d'étude est présenté par ostension sur un exemple, une phase de synthèse où l'objet est institutionnalisé et une phase d'application où l'objet d'enseignement est directement investi à travers une application directe de la définition, propriété ou technique institutionnalisée. Du point de vue de la topogénèse, c'est-à-dire des places et des rôles dévolus à l'enseignant et l'élève corrélativement au savoir, c'est le professeur qui fait la théorie par un enseignement magistral fondé sur l'ostension et c'est à l'élève de l'appliquer à l'intérieur d'exercices essentiellement « techniques ».

Ces praxéologies ne seront pas complètement modifiées pendant la période de la contre réforme. Certaines transformations au niveau des organisations mathématiques seront introduites, influencées par les tendances de l'époque, mais la forme d'organisation de l'étude sera conservée.

## III.3 La période de la « contre-réforme » (Programmes des années 1978-1988)

### III.3.1 Contexte institutionnel et organisation du domaine de l'algèbre enseignée

La nouvelle réforme, mise en œuvre en 1978, donne lieu à des changements significatifs dans les programmes du secondaire. Prenant en compte le décalage manifeste entre les idées fondatrices de la réforme des mathématiques modernes et la réalité des classes, et constatant que « l'enseignement dérivait vers un formalisme privé de sens[13] », les réformateurs décidèrent de renoncer à faire appréhender la démarche axiomatique aux élèves. Par exemple, dans le programme officiel de 1ère année, il est mentionné que *" dans ses exposés, le professeur écartera toute présentation axiomatique d'une notion et proposera des activités susceptibles de consolider les acquisitions antérieures "*.

Dans une instruction du programme officiel relative au second cycle (3ème, 2nde, 1ère et Terminale françaises), Spécialité " Maths-Sciences " et " Maths-techniques ", il est noté que *" ces programmes (d'algèbre et de géométrie) ont été conçus de façon à éviter, dans la mesure du possible, toute présentation axiomatique des concepts et toute formalisation inutile "*.

Les programmes de l'époque voient une réduction très sensible des notions ensemblistes. De ce fait, les centres d'intérêt du programme officiel (Tunisie 1978, 1982) ne sont plus la notion d'ensemble et les structures algébriques (Bannout et Hussain, 1987) comme nous pouvons le constater sur cet extrait :

> « A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique, c'est-à-dire que, des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). Mais il est absolument nécessaire que de nombreuses manipulations ...Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont les démonstrations et de leur apprendre à en rédiger ; les prémisses devront donc être précisées avec soin. On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans le commentaire ; mais d'autres choix demeurent légitimes. » (Programme officiel de l'enseignement secondaire, 1982, p. 19).

La contre–réforme met donc plutôt l'accent sur la géométrie : géométrie euclidienne et analytique au détriment de l'algèbre. On constate en effet la prépondérance des sujets d'étude liés au travail graphique et géométrique. Les extraits suivants des programmes officiels de mathématiques de l'enseignement secondaire (1982) pour la quatrième

[13] Comme le remarquera Artigue (1992), dans son analyse des conséquences de la réforme des mathématiques modernes introduite en France.

année (toutes sections : math sciences, math technique et lettres, correspondant actuellement à la première année du secondaire) montrent le découpage de la discipline en trois domaines : nombres réels, calculs algébriques et fonctions numériques, Plan Euclidien et Géométrie plane euclidienne. Nous synthétisons le découpage préconisé pour le premier domaine qui intéresse notre recherche en secteurs et thèmes d'études dans le tableau suivant :

| **Secteurs d'études** | Nombres réels | Calculs algébriques | Fonctions numériques |
|---|---|---|---|
| **Thèmes d'études** | Propriétés de l'addition, multiplication et ordre dans IR défini comme un corps totalement ordonné. | Somme, produit, quotient de nombres réels. | Fonctions polynômes.<br>Fonctions rationnelles.<br>Fonction linéaire et fonction affine.<br>exemples de fonctions en escalier et de fonctions affines par intervalles.<br>représentation graphique.<br>Mise en équations de problèmes variés, mathématiques ou non. Exemples conduisant à une ou deux équations ou inéquations du premier degré à une ou deux inconnues, à coefficients numériques.<br>Représentations graphiques des solutions d'une équations ou d'une inéquation du premier degré à deux inconnues. |

La lecture de ces programmes ne permet pas de relever précisément les sujets d'études à enseigner mais il semble à la vue de l'ensemble du corpus à enseigner au secondaire que cette période d'enseignement se caractérise par une nouvelle approche de l'enseignement de l'algèbre qui n'est pas celle des ensembles mais qui rapproche ce domaine d'étude de celui de la géométrie analytique. Ce constat rejoint d'ailleurs celui évoqué par Coulange (2000) concernant les caractéristiques de la période de la contre réforme en France (1980-1989) :

« La contre réforme va dans le sens de la construction d'une interrelation étroite entre l'enseignement de l'algèbre et de la géométrie. » (L. Coulange, 2000 p 129).

De plus, à la lecture des programmes, il nous semble qu'une caractéristique importante du savoir à enseigner à cette période concerne le formalisme algébrique qui continue à accompagner les techniques de résolution algébrique et graphique. On constate également un retour des problèmes concrets ou d'origine arithmétique à mettre en équation. Une nouvelle approche de l'enseignement de l'algèbre semble ainsi s'amorcer même si l'étude de ces problèmes est « reportée après coup » et apparaît en quelque sorte coupée de l'étude des objets de l'algèbre qui est menée bien en amont.

L'analyse de l'ouvrage officiel correspondant nous éclairera sur ces points.

### III.3.2 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Equations du premier degré à deux inconnues »

***Une approche des équations par les fonctions***

Dans le manuel[14] de 1984-85, l'étude des équations et systèmes d'équations à deux inconnues fait l'objet du chapitre 5, elle est précédée par celle des équations et inéquations du premier degré à une inconnue, objet du chapitre 4 et celle des applications linéaires et affines qui constitue le chapitre 3. Ainsi l'étude des équations est fortement associée à celle des inéquations et situées les unes comme les autres dans la dépendance des fonctions numériques. Les auteurs du manuel commencent par définir l'objet de savoir dans un contexte purement fonctionnel.

**Notion d'équation**
Exemple
Considérons les applications f et g de IR dans IR définies par :
$f(x) = x^2 + 3x +2$ et $g(x) = 4(x+1)$.
Montrer que f et g ne sont pas égales.
Montrer que $f(-1) = g(-1)$ et $f(2) = g(2)$.
Les réels -1 et 2 sont appelés solutions dans IR de l'équation $f(x) = g(x)$.
**Définition**
Soient deux applications numériques à variable réelle f et g . S'il existe un réel $x_o$ tel que $f(x_o) = g(x_o)$, on dit que $x_o$ est solution dans IR de l'équation $f(x) = g(x)$ , où x représente l'inconnue. Résoudre dans IR l'équation $f(x) = g(x)$, c'est trouver l'ensemble S des solutions de cette équation.

***Disparition des fonctions dans l'environnement des équations à deux inconnues***

Pourtant dans l'introduction officielle des équations du premier degré à deux inconnues, on peut constater la disparition de l'arrière plan théorique lié aux fonctions à deux variables de la période des mathématiques modernes. Le discours qui accompagne la définition, non seulement naturalise l'objet de savoir comme s'il s'agissait d'une continuité de l'étude des équations à une inconnue, mais celui-ci se voit d'emblée contextualisé à la résolution des équations dans $IR^2$. Le formalisme est immédiatement présenté, pour reprendre les termes de Conne (1991), l'objet est simplement installé.

**I- Equations du premier degré à deux inconnues réelles**
**1) Etude d'un exemple**
Soit à déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que $x - y + 2 = 0$.
Donnons à x une valeur quelconque $x_0$ , on obtient l'équation du premier degré à une inconnue y :
$x_0 - y + 2 = 0$, admettant la solution unique $y_0 = x_0 + 2$.
Ainsi à chaque valeur $x_0$ de x correspond une valeur $y_0 = x_0 + 2$ de y. Il existe donc une infinité de couples (x,y) vérifiant $x - y + 2 = 0$.
Ce sont les couples (x, y) tels que $x = x_0$ et $y = x_0 + 2$ où $x_0$ est un réel quelconque.
**2) Définition**
On appelle équation du premier degré à deux inconnues x et y toute équation de la forme
$ax + by + c = 0$ où a,b,c sont des réels donnés.

[14] C'est le manuel qui, pour la première fois, met en œuvre la « contre-réforme » de 1978.

Résoudre dans $IR^2$, l'équation $ax + by + c = 0$, c'est déterminer l'ensemble des couples de réels $(x_0 , y_0)$ pour lequel $a x_0 + b y_0 + c = 0$ .

## *Une technique algébrique accompagnée d'un formalisme explicite*

Soulignons l'importance qui reste néanmoins accordée au formalisme algébrique lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du premier degré à deux inconnues. La portée de la technique algébrique résolution est directement étendue au différents cas d'ensembles de solutions, selon les paramètres a, b et c qui apparaissent dans la forme canonique de l'équation. Les auteurs du manuel présentant les solutions finales sous une forme ensembliste :

$S= \{(x, f(x), x\in IR\}$ où x est une variable réelle.

**3) Résolution de l'équation $ax + by + c = 0$**
Soit à résoudre dans $IR^2$, l'équation $ax + by + c = 0$ oŭ a, b, c sont des réels donnés.
Désignons par S l'ensemble des solutions de cette équation.
**1er cas** :$(a,b) = (0,0)$
L'équation s'écrit : $0x + 0y + c = 0$.
Si $C= 0$ alors $S = IR^2$.
Si $C\neq 0$ alors $S = \emptyset$.
**2ème cas** : $(a, b) \neq (0,0)$.
Si $a\neq 0$, alors l'équation $ax + by + c = 0$ équivaut à $x = -\frac{b}{a} y -\frac{c}{a}$.

D'oŭ $S= \{(-\frac{b}{a} y -\frac{c}{a}, y)\}$.

Si $b \neq 0$, alors l'équation $ax + by + c = 0$ équivaut à $y = -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$

D'oŭ $S= \{(x, -\frac{a}{b} x -\frac{c}{b})\}$

## *Un discours technologique explicite autour de la résolution algébrique*

Contrairement aux réformes précédentes, l'accent est mis sur les conditions nécessaires et suffisantes autour de la résolution des équations du premier degré à deux inconnues à travers la notion d'équivalence. Le discours des auteurs du manuel explicite cette notion, définissant deux équations équivalentes comme deux équations qui « ont le même ensemble de solutions dans $IR^2$ » :

**Equations équivalentes**
**Définition**
Deux équations du premier degré à deux inconnues sont équivalentes dans $IR^2$ si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions dans $IR^2$.
**Exercice**
Dans chacun des cas suivants, dire si les équations proposées sont équivalentes dans $IR^2$.

## *La « résolution graphique » : un enjeu d'enseignement*

Nous relevons à travers l'organisation mathématique développée dans ce manuel, l'importance nouvelle accordée au travail et à l'approfondissement de la technique graphique. Contrairement à la réforme des mathématiques modernes laissant très peu de place à la technique graphique qui reste cantonnée dans un rôle « d'illustration », le travail dans le registre graphique est ici fortement mis en avant. L'étude des trois cas particuliers d'ensemble de solutions s'appuie notamment sur le travail mené autour des équations de droite dans ce registre :

**Représentation graphique des solutions**
**Définition**

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan.
La représentation graphique des solutions de l'équation ax + by + c = 0 est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ sont solutions de cette équation.

Dans le cas où (a,b) ≠(0,0), la représentation graphique de l'équation ax + by + c = 0 est une droite.
**Exercice**
Résoudre dans $IR^2$ les équations suivantes, d'inconnue (x, y) :
6x + 2y+ 1 = 0.
3y + 9 = 0.
2x – 1 = 0.
Représenter graphiquement dans chacun des cas l'ensemble $S_{IR}{}^2$ des solutions.

En effet, parallèlement cette étude, les équations cartésiennes d'une droite font l'objet d'un chapitre à part entière dans la partie du manuel consacrée au domaine de la géométrie. Les auteurs du manuel ne ressentent pas le besoin d'apporter un discours technologique autour de la technique graphique après avoir défini dans ce chapitre la notion d'« équation cartésienne de droite ».

**Equation cartésienne d'une droite**
Le plan P étant rapporté au repère cartésien R (o, i, j), soient A un point de P de coordonnées $(x_o, y_o)$ et un vecteur non nul de V de coordonnées (α, β) dans la base B (i, j).
Considérons la droite D de P passant par A et de vecteur directeur u . Un point M quelconque du plan de coordonnées (x, y) appartient à D si et seulement si AM et u sont colinéaires, c'est-à-dire
$\beta (x - x_o) - \alpha(y - y_o) = 0$ soit $\beta x - \beta x_o - \alpha y + \alpha y_o = 0$
On dira que βx- αy -β xo + α yo = 0 est une équation cartésienne de D.
**D'où le théorème**
Soit (o, i, j) un repère du plan P et a, b, c trois réels donnés tels que (a, b) ≠ (0,0).
L'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que a x +by +c = 0 est une droite dont un vecteur directeur est u (-b, a)

## III.3.3 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues »

Les systèmes de deux équations à deux inconnues ne sont pas introduits en tant qu'objet de savoir, c'est plutôt la raison d'être de cet objet qui est mise en avant comme « intersection des ensembles infinis de couples solutions d'équations à deux inconnues », comme on peut le voir sur cet extrait du manuel :

Considérons les deux équations du premier degré à deux inconnues réelles.

$x + y = 1$ et $x - y = 3$
L'ensemble $S_1$ des solutions de l'équation $x + y = 1$ est constitué par tous les couples de la forme (x , 1-x), oŭ x est un réel quelconque.
L'ensemble $S_2$ des solutions de l'équation $x - y = 3$ est constitué par tous les couples de la forme (x , x - 3), oŭ x est un réel quelconque.
L'ensemble S des solutions aux deux équations est égal à $S_1 \cap S_2$. Déterminer S, c'est résoudre le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

$$\begin{cases} y_0 = 1 - x_0 \\ y_0 = x_0 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x_0 = x_0 - 3 \\ y_0 = x_0 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \text{ »} \\ y_0 = -1 \end{cases} \quad \text{Donc } S = \{(2, -1)\}$$

**Définition**

Considérons deux équations du premier degré à deux inconnues réelles x et y, $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ oŭ a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés.
Déterminer s'il en existe, les solutions communes aux deux équations, c'est résoudre le système

$$\begin{cases} a x + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

## *Un approfondissement des techniques algébriques*

Par la suite, les auteurs du manuel officiel de l'époque présentent les trois techniques de résolution algébrique par substitution, par combinaison et par comparaison, par ostension à travers des exemples qui s'étendent à l'étude des cas particuliers d'ensembles de solutions. En voici un extrait :

Résolution par substitution
Exemple.
Soit à résoudre le système :

(1) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$

On peut écrire successivement les systèmes équivalents suivants :

(2) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 4x+2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + 2(4x+2) = 3 \\ y = 4x+2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 9x + 4 = 3 \\ y = 4x+2 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 9x + 1 = 0 \\ y = 4x+2 \end{cases}$

(6) C'est-à-dire : $\begin{cases} x = -1/9 \\ y = 4(-1/9) + 2 \end{cases}$ (7) Donc $\begin{cases} x = -1/9 \\ y = 14/9 \end{cases}$ D'où : $S = \{(-1/9, 14/9)\}$

Résoudre dans $IR^2$
$3x - 6y = -2$
$-1/2x + y = 1/3$
On peut écrire successivement les systèmes équivalents suivants

$$\begin{cases} 3x - 6y = -2 \\ -\frac{1}{2}x + y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \\ 3x - 6(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \\ 3x - 2 - 3x = -2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x \\ 0x = 0 \end{cases} \quad \text{Soit } y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x$$

Donc $S = \{(x, \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x), x \in IR\}$

Soulignons l'importance accordée au travail algébrique, à travers les applications proposées dans la partie « cours ». Nous y retrouvons des exemples faisant apparaître des paramètres ou une valeur absolue ou encore comportant des produits ou des fractions. Certaines techniques algébriques utilisent aussi un changement de variables, nécessitent une maîtrise certaine du calcul algébrique et littéral et un maniement formel suffisamment avancé pour résoudre les tâches proposées. Nous l'illustrons par un exemple qui figure dans cette partie :

Soit m un réel. Résoudre dans $IR^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 2m - 1 \end{cases}$$

1) pour m = 1.
2) pour m = - 1.
3) pour $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
4)

***La géométrie analytique au service de la « résolution graphique »***

Comme nous l'avons déjà souligné, la notion d'équation cartésienne de droite est étudiée en géométrie analytique parallèlement à l'étude des équations Elle fait explicitement partie du discours technologico-théorique qui soutient la technique de résolution graphique conjointement avec l'étude des fonctions affines.

La représentation graphique d'une application affine définie par f(x) = ax + b est la droite passant par le point A (0, b) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1, a).
Soit D la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère cartésien (o, i, j).
$D = \{M \in P, M(x,y), y = ax + b\}$ ; d'où $D = \{ M \in P, M(x,y), ax - y + b = 0\}$.
Donc D est la droite passant par le point A (0, b) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1, a).

La technique de résolution graphique des systèmes d'équations est ainsi abordée en continuité avec l'étude des équations à deux inconnues dans le registre graphique et sa portée s'étend à l'étude des trois cas particuliers d'ensembles de solutions.

**Interprétation graphique**

Le plan est rapporté à un repère (o, i, j), Considérons deux droites D et D' d'équations respectives : ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0.
Déterminons l'ensemble $D \cap D'$, c'est déterminer tous les points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient les équations : ax + by + c = 0 et a'x + b'y +c' = 0.
On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Inversement, la résolution d'un système permet de déterminer l'intersection des deux droites d'équations respectives: ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0.

***La mise en équation en « arrière plan » de l'étude***

Dans le chapitre consacré aux équations et aux systèmes de deux équations à deux inconnues, on ne voit apparaître aucun problème de mise en équation. Les problèmes du premier degré font en fait l'objet d'un chapitre à part, à la fin du manuel. Les auteurs du manuel introduisent l'étude de ces problèmes en précisant la nature des situations proposées et le découpage de la technique en sous tâches :

« Ce chapitre comporte quelques exemples de résolution de problèmes concrets fournissant des occasions d'utiliser des propriétés du calcul algébrique dans un domaine lié à la réalité et à la vie pratique.
Il comporte également un exemple de résolution de problèmes géométriques.
La résolution algébrique d'un problème comprend, en général quatre parties :
*Choix des inconnues.
*Traduction mathématique.
*Résolution du problème mathématique.
* Retour à l'énoncé ».

Dans la partie cours de ce chapitre, nous relevons des exemples de problèmes concrets qui offrent l'occasion d'utiliser des propriétés du calcul algébrique dans un domaine lié à la réalité et à la vie pratique. Quatre exemples sont proposés, deux d'entre eux se rapportent à un système d'équations et les deux autres se modélisent par un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues. Ces exemples sont accompagnés de solutions détaillées qui font apparaître à chaque fois les sous tâches composant la technique de mise en équations :

12 bouteilles d'huile de qualité A et 8 bouteilles d'huile de qualité B valent ensemble 15,600 dinars. On a acheté 5 bouteilles d'huile de qualité A et 3 bouteilles de qualité B au prix de 6,250 dinars. Quel est le prix d'une bouteille d'huile de chaque qualité ?
1- Choix des inconnues
Désignons par x le prix en dinars d'une bouteille d'huile de qualité A et par y le prix en dinars d'une bouteille d'huile de qualité B.
2- Traduction mathématique
Le prix en dinars de 12 bouteilles d'huile de qualité A et de 8 bouteilles d'huile de qualité B étant de 15,60 on a :
$12x + 8y = 15{,}600$
Le prix en dinars de 5 bouteilles d'huile de qualité A et de 3 bouteilles de qualité B étant de 6,250, on a :
$5x + 3y = 6{,}250$
3- Résolution
On est amené à résoudre dans $ID^*_+ \times ID^*_+$, le système

$$\begin{cases} 15x + 3y = 6{,}250 \\ 2x + 8y = 15{,}600 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3{,}900 \\ 5x + 3y = 6{,}250 \end{cases}$$

On trouve aisément $x = 0{,}800$ et $y = 0{,}750$
4- Retour à l'énoncé
Les valeurs trouvées pour x et y sont des décimaux strictement positifs. Elles peuvent correspondre à la réalité. On peut donc dire que le prix d'une bouteille d'huile de qualité A est de 0,800 dinars et le prix d'une bouteille d'huile de qualité B est de 0,750 dinars.

Parmi les problèmes posés, nous relevons la présence de problèmes géométriques qui renvoient à la tendance de l'époque à travailler conjointement les techniques algébriques et graphiques et des problèmes, qui mettent en avant une interrelation entre « équations et fonctions » et qui se rapprochent d'ailleurs des problèmes proposés dans le manuel de la « réforme moderne ». A titre d'exemples, nous citons ci-dessous deux problèmes proposés dans le manuel de l'époque (1984) :

**Problème géométrique**
Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que AB = 9cm et BC= 15cm. On prend un point M sur (AB) et l'on pose AM = x. Par ce point M, on mène la parallèle à (BC) qui coupe (AC) en N.
1-Evaluer en fonction de x le périmètre $y_1$ du triangle AMN et le périmètre $y_2$ du trapèze MNCB.
2-Pour qu'elle valeur de x le périmètre du triangle AMN est-il égal au périmètre du trapèze ?
3- Représenter graphiquement les applications
$f : x \longrightarrow y_1$ et $g : x \longrightarrow y_2$
Donner une solution graphique de la deuxième fonction

Une entreprise de location de voitures automobiles propose à ses clients 3 options :
Option A : 3 dinars de frais fixes plus 45 millimes par km parcouru.
Option B : 3,500 dinars de frais fixes plus 35 millimes par km parcouru.
Option C : 4,500 dinars de frais fixes plus 30 millimes par km parcouru.
1-Exprimer en fonction du nombre x de kilomètres parcourus les frais de location $y_1 = f(x)$, $y_2= g(x)$, $y_3= h(x)$ correspondant respectivement aux options A, B et C.
Représenter graphiquement f, g et h (on prendra 1cm pour 10 km en abscisses et 1cm pour 500 millimes en ordonnées).
2- A partir de quel kilométrage l'option B est plus avantageuse que l'option A ; l'option C plus avantageuse que l'option B ; l'option C plus avantageuse que l'option A ?
Retrouver graphiquement ces résultats.
En fonction du kilométrage qu'il a à parcourir qu'elle option conseilleriez-vous à un client ?

A travers ces énoncés, on peut voir l'organisation mathématique construite autour de la résolution graphique des systèmes d'équations « rejoindre » nettement celle mise à l'étude pendant la période classique au sein de laquelle les équations de droites sont en interrelation étroite avec les courbes représentatives des fonctions affines.

### III.3.4 Du point de vue des organisations didactiques et de leur incidence sur la topogénése

Sur le plan des organisations didactiques, qui accompagnent la mise en place des organisations mathématiques développées dans ce manuel autour des objets algébriques et pas uniquement autour des objets d'enseignement « équations et systèmes d'équations », nous ne constatons pas de modifications par rapport à l'ouvrage correspondant à la période des mathématiques modernes. Il s'agit pratiquement d'une organisation de l'étude qui se réalise en deux temps : la définition qui est d'emblée présentée et qui fait partie du topos de l'enseignant suivie d'un exercice qui fait partie du topos de l'élève limité à une application immédiate des connaissances transmises.

## III.4 La période « contemporaine » (Programmes des années 1993-2002)

### II.4.1 Contexte institutionnel et organisation du domaine de l'algèbre enseignée

En 1993, l'enseignement tunisien a connu une nouvelle réforme, désignée par « la réforme de l'école de Base » qui consiste à instaurer une école de base de 9 ans remplaçant l'école primaire (6 ans) et le premier cycle de l'enseignement secondaire (3 ans). Au cours de ces années, l'enseignement des mathématiques est dispensé en arabe. Un enseignement secondaire de 4 ans remplace ensuite le deuxième cycle de l'enseignement secondaire précédent. Cet enseignement, entré en application en 1998, est dispensé en français.

Dans cette réforme, la tendance de la réforme précédente se retrouve avec une évolution assez marquée. Elle vise à diminuer la prépondérance des notions ensemblistes et de l'algèbre linéaire dans les programmes. L'algèbre enseignée semble influencée par un retour au « concret » et devient plus proche d'une algèbre élémentaire traditionnelle.

Les équations du premier degré à une inconnue, sont introduites en 8ème année de base (2ème année de collège) dans l'ensemble des rationnels relatifs, elles sont par la suite reprises après extension du domaine des nombres à IR. Leur enseignement ne semble pas faire l'objet d'une étude théorique, et leur résolution semble a priori prendre appui sur le registre numérique comme on peut le voir à travers les recommandations qui apparaissent dans les programmes officiels de l'année 2002-2003 :

« La résolution des équations se fera à partir d'exemples numériques sans étude théorique et sans utilisation de paramètre » (programme officiel, p. 40).
« On n'exigera pas de la part des apprenants, de résoudre des équations comportant une valeur absolue ou qui nécessitent une discussion. » (Programme officiel, p. 40).

La première directive laisse penser à des techniques de résolution des équations du premier degré à une inconnue réelle avec des coefficients numériques et non la gestion d'écritures générales comme a x+by=c.

En première année du secondaire, le domaine central du savoir à enseigner est spécifié et désigné, il s'agit de l'algèbre. Les secteurs consacrés aux équations, aux applications et aux inéquations semblent indépendants :

| **Secteurs d'études** | Calculs dans IR | Equations du premier degré et problèmes | Applications | Inéquations du premier degré |
|---|---|---|---|---|
| **Thèmes d'études** | *Règles opératoires dans IR.<br>*Règles sur les puissances.<br>*Produits remarquables<br>*Racines carrées. | * Equations du premier degré à une inconnue réelle.<br>* Equations du premier degré à deux inconnues réelles.<br>* Systèmes de deux Equations du premier degré à deux inconnues réelles. | *Applications linéaires.<br>* Applications affines. | * Comparaison des réels.<br>* Inéquations du premier degré à une inconnue réelle. |

Par rapport à la période de la contre réforme, où la mise en équation est repoussée à l'arrière plan de l'étude, la résolution de problèmes semble constituer ici un objectif majeur. La technique de mise en équation est bien spécifiée puisqu'on trouve pour la première fois dans les programmes officiels la description d'une méthode de « mise en équation(s) ». Ceci montre la volonté des concepteurs d'amorcer une nouvelle approche de l'algèbre qui semble s'organiser autour de sa dimension « outil ».

« Pour la résolution de tout problème, on dégagera nettement les différentes phases : choix de l'inconnue ou des inconnues, mise en équation, résolution de l'équation ou du système d'équations, vérification et interprétation des résultats. » (programme officiel, p. 9).

Les directives du programme précisent également le champ des problèmes à proposer aux élèves et mettent l'accent sur la diversité des cadres et des contextes à prendre en considération dans le travail de modélisation :

« Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève ». (Programme officiel, p. 9).

Le secteur consacré aux applications linéaires et affines s'intercale entre les thèmes équations du premier degré à une inconnue et équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues. Son objectif paraît être structuré autour des représentations graphiques de ces applications et de leur interprétation. Une articulation est explicitement souhaitée entre registres graphique, algébrique et numérique :

« Les notions d'application d'un ensemble vers un autre et de restriction d'une application sur un intervalle de IR seront introduites au cours des activités et on évitera de s'attarder sur leurs aspects théoriques. Les applications linéaires et affines seront appréhendées sous les trois aspects suivants : numérique, graphique et relation entre deux variables. On mettra en évidence la relation entre les fonctions linéaires et la proportionnalité. » (Programme officiel, p. 9).

Si cette articulation entre registres numérique, graphique et algébrique semble explicitement souhaitée dans le thème d'étude des applications linéaires et affines, il n'en demeure pas moins que l'accent mis sur la notion d'inconnue dans la partie réservée aux équations et aux systèmes d'équations sous-entend une approche des équations qui n'est pas à proprement parler « fonctionnelle », éléments sur lesquels nous reviendrons à travers l'analyse du chapitre consacré aux équations du premier degré à deux inconnues et systèmes d'équations.

Cette période a connu deux ouvrages, le manuel officiel pour la classe de quatrième année secondaire (actuellement la première) (code 221 401) et qui a été utilisé jusqu'au en 1998 et le second applicable à partir de cette date (code 222 101). Nous nous proposons dans ce qui suit de décrire les organisations mathématiques et didactiques données à voir dans le chapitre consacré aux thèmes d'études considérés dans notre recherche.

### III.4.2 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Equations du premier degré à deux inconnues »

Les organisations mathématiques développées autour des équations dans les manuels officiels de 1993 et 1998, présentent à peu prés les mêmes caractéristiques. Par contre, du point de vue de l'organisation de l'étude, bien qu'ils présentent tous deux des innovations par rapport aux manuels de la réforme et de la contre réforme, celui de 1998 met en avant une nouvelle organisation « ternaire » de l'étude en « activités », « synthèse » (identifiable au « cours ») et « applications » qui a des conséquences directes sur la topogénése. Nous y reviendrons dans nos analyses après une étude des praxéologies mises en place autours des thèmes d'étude « Equations » et « Systèmes d'équations ».

***Une approche des équations par la modélisation***

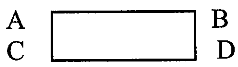
Contrairement aux époques de la réforme et de la contre-réforme, les équations ne sont plus présentées en tant qu'objet de savoir mais en tant que relation qui modélise une situation évoquée par un problème. Ainsi, dans ces deux manuels, il n'est plus question de définir la « notion d'équation » mais de la représenter formellement en tant que relation entre deux inconnues:

Soient a, b, c trois réels donnés tels que a et b ne sont pas nuls à la fois. On appelle équation du premier degré à deux inconnues réelles x et y toute relation qui se ramène à la forme $a\,x + by = c$.

Au sein des deux manuels, l'étude des équations à deux inconnues, est réalisée selon la dimension « outil » de l'algèbre. Toutefois, celui de 1998 met plus l'accent sur la résolution de problèmes et sur la mise en équation comme objet d'enseignement. Cette volonté apparente au niveau des organisations mathématiques et didactiques des objets d'enseignement suggère une nouvelle approche de l'enseignement fondée sur des dialectiques explicites entre registres, particulièrement celui du langage naturel et des écritures algébriques. Ainsi, dans la première activité introductive aux équations du premier degré à deux inconnues, des dialectiques entre arithmétique et algèbre apparaissent au fil des tâches proposées. La mobilisation du cadre des grandeurs paraît un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre ces deux registres. Les formules d'aires sont aisément mobilisables par les élèves de ce niveau pour écrire l'équation souhaitée.

Un entraîneur de football a inventé pour son équipe la technique suivante, il s'agit de jouer en rectangle de 100 mètres de périmètre ; c'est à dire quatre joueurs A, B, C, D quelconque se déplacent dans le terrain en essayant de former un rectangle de 100 mètres de périmètre.

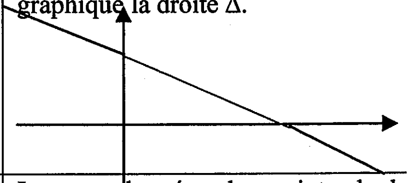
a) Que pourrait être la distance entre A et B d'une part et B et C d'autre part ?
Donnez cinq possibilités.
b) Pouvez vous donner toutes les possibilités ?




c) Si vous prenez AB= x et BC = y. Quelle relation doit exister entre x et y ?
La relation entre x et y que vous avez trouvée est $2x + 2y = 100$. Cette relation qui contient deux lettres s'appelle **équation du premier degré à deux inconnues réelles x et y.**

Au fil des activités proposées, il apparaît clairement que la mise en équation constitue un objet d'enseignement explicite. Les auteurs du manuel mettent bien en avant le découpage de la technique de mise en équations en sous tâches. Les techniques relatives sont accompagnées de commentaires explicites et illustrées par des exemples de formulation des solutions qui offrent des possibilités de validation de l'équation produite, comme l'illustre l'extrait suivant:

2- Résolution d'un problème qui utilise une équation du premier degré à deux inconnues réelles

| Les étapes | Le contenu | Exemple |
|---|---|---|
| **1- Choix des inconnues.** | On a deux inconnues donc on choisit deux lettres pour désigner ces inconnues. | x désigne AB.<br>y désigne BC. |
| **2- Mise en équation.** | On traduit le fait que le périmètre P du rectangle doit être égal à 100 mètres par une relation qui contient les inconnues. | $2(AB + BC) = P$<br>$2(x + y) = 100$ |
| **3- Résolution de l'équation (graphique).** | Dans un repère cartésien (o, i, j) on représente les solutions par des points du plan dont les coordonnées sont x et y. | On a $2x + 2y = 100$<br>Ou encore $2y = -2x + 100$<br>C'est-à-dire $y = -x + 50$<br>L'application affine<br>$x \mapsto -x + 50$ a pour représentation graphique la droite $\Delta$.<br> |
| **4-Vérification et interprétation des résultats.** | Retour à l'énoncé pour voir la validité des solutions. | Les coordonnées des points de la droite sont solutions de l'équation. Pour que ces coordonnées soient solutions du problème il faut qu'elles soient positives, non nulles et inférieures à 50. Donc les coordonnées des points du segment [AB] privé des points A et B constitue les couples solutions du problème. |

***Une valorisation du travail graphique***

Dans les deux manuels, la résolution graphique apparaît aussi comme un enjeu d'enseignement explicite. Ainsi, dans le manuel de 1993, la résolution d'une équation à deux inconnues est d'emblée envisagée dans le registre graphique moyennant les connaissances autour des fonctions affines. L'activité introductive se présente comme un problème concret accompagné d'une solution (problème d'argent). Le travail prescrit à l'élève se limite à une vérification du processus de modélisation.

La technique graphique repose dès lors sur une transformation d'écriture pour ramener l'équation obtenue après mise en équation, à sa forme réduite. Notons d'ailleurs, que l'équation cartésienne d'une droite, enjeu important de la contre-réforme, est devenue hors programme ; seule l'équation réduite $y = a x + b$ est objet d'enseignement.

**Activité 1**

Pour nourrir son bétail, un éleveur a acheté de l'orge et de la fèverole pour 42 dinars. Sachant que le prix du kg d'orge est 300 millimes et que celui du kg de fèverole est 180 millimes, quelle est la masse en kg de chacun des constituants ?

Pour résoudre ce problème, un élève écrit

Si x désigne la masse en kg de l'orge et y celle de la fèverole, on doit avoir,

$300x + 180y = 42000$

$5x + 3y = 700$

Es-tu d'accord avec la mise en équation du problème faite par cet élève ?

Un autre élève propose la solution x = 80 et y = 100. A-t-il raison ?
As-tu d'autres solutions à proposer à l'éleveur ? Combien ?
5x + 3y = 700 est une équation qui contient deux inconnues .Chercher les solutions de cette équations revient à chercher tous les couples (x,y) de réels positifs vérifiant l'égalité 5x + 3y = 700
Dans un repère (o,i,j) du plan, trace la droite (D) dont une équation est
5x + 3y = 700 c'est-à-dire y = -5x/3 + 700/3
Intéresse toi à l'ensemble (D') des points M de la droite dont les coordonnées sont positives
Le couple (x,y) des coordonnées de tout point M de D' est un couple solution de l'équation.
On dit que le demi-droite [ D') représente l'ensemble des couples solutions de l'équation 5x + 3y = 700 ou de l'équation ou de l'équation 300 x + 180 y = 42000.

Dans le manuel de 1998, l'étude du type de tâche : « résolution graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues » occupe également une place relativement importante avec un discours technologique explicite autour du travail graphique. Les auteurs du manuel mettent en avant l'organisation mathématique autour des fonctions affines au service de la résolution graphique.

Soit l'équation du premier degré à deux inconnues réelles x et y 3x - y = 5
Représenter graphiquement les solutions de cette équation.
Réponse
3x – y = 5 s'écrit aussi y = 3x - 5
x $\longrightarrow$ 3x - 5 est une application affine. Sa représentation graphique dans un repère cartésien est une droite Δ
Si vous prenez x = 1 alors vous trouverez y = - 2 donc Δ passe par le point E (1, -2)
Si vous prenez x = 2 alors vous trouverez y = 1 donc Δ passe par le point F (2, 1)
Placez les points E et F dans un repère cartésien (o, i, j) puis tracer la droite Δ c'est-à-dire (EF).
Ainsi les coordonnées de chaque point de Δ (représentation graphique de l'application affine définie par y = 3x - 5) désignent une solution de l'équation 3x - y = 5
Le point E (1, -2) est un point de la droite Δ donc le couple (1, -2) est une solution de l'équation 3x - y = 5.
Plus généralement
(o,i, j) est un repère cartésien du plan, la représentation graphique des solutions de l'équation a x + by = c (a et b sont deux réels non nuls à la fois) est une droite.

La portée de cette technique s'étend à l'étude des cas particuliers des équations de la forme y = c et x = c. Les auteurs précisent pour chaque cas la position de la droite portant les solutions de l'équation en jeu.

**Cas particuliers**
(o,i, j) est un repère cartésien du plan,
a) Placer les points A (1,2) ; B (4,2) ; C (-1,2) ; D (-5,2) ; E (0,2)
b) Que remarquez vous ? Qu'elle conclusion pouvez-vous tirer ? Vous venez de représenter graphiquement quelques solutions de l'équation 0x + y = 2.
Plus généralement,
Soit c un réel quelconque, la représentation graphique des solutions de l'équation y = c est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

***Une technique algébrique explicite***

Dans les deux manuels correspondant à cette époque, le travail algébrique prend en compte l'articulation explicite entre plusieurs registres sémiotiques : registre numérique, registre des écritures algébriques... Ainsi, dans le manuel de 1993, la résolution algébrique d'une équation à deux inconnues s'appuie sur le registre numérique par la mobilisation d'un tableau de valeurs permettant de distinguer les couples solutions et d'orienter progressivement les élèves vers la technique algébrique à mobiliser ,à savoir se fixer la valeur d'une inconnue et rechercher la deuxième inconnue.

**Activité2**
On donne l'équation du premier degré à deux inconnues réelles x et y
2x +y -1 = 0
Complète :
(1, -1) est solution de cette équation car....
(0, 2) n'est pas solution de cette équation car....
b) Si (α, β) est une solution de cette équation, complète le tableau suivant

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| α | 2 | . | . | 0 | √2 | . |
| β | . | -1 | -3/2 | . | . | . |

Par ailleurs, nous pouvons constater au sein des organisations mathématiques développées des traces d'un langage de nature « ensembliste » : ce formalisme algébrique (ensemble IR ×IR, couples, lettres pour désigner des paramètres) subsiste dans le discours tenu sur l'équation à deux inconnues et sa résolution.

**Activité 4**
Résoudre dans IR× IR l'équation 2x + y – 1 = 0
Solution
Résoudre cette équation, c'est déterminer tous les couples de réels (x, y) qui vérifient l'égalité
2x + y – 1 = 0.
2x +y -1 = 0 est équivalente à y = -2x +1
Si S désigne l'ensemble des solutions de cette équation on a
S = {(x, y) / (x, y) € IR ×IR et y = -2x +1}  S = {(x, -2x +1) / (x, ∈ IR}
- Soient (o, i, j) un repère du plan et (D) la droite dont une équation est y = -2x +1
La droite (D) est la représentation graphique de l'ensemble des couples (x, y) de IR×IR , solutions de l'équation 2x + y – 1 = 0. (D) représente donc S.

Nous retrouvons ces mêmes caractéristiques au niveau des organisations mathématiques données à voir dans le manuel de 1998. Les auteurs commencent par faire fonctionner la notion de couple de nombre comme solution d'une équation à deux inconnues, avant de passer à la résolution algébrique.

Solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues
Revenez aux joueurs de football de l'exemple précédent, la possibilité x = 30 et y = 20 vérifie l'équation 2x + 2y = 100
Le couple (30, 20) est appelé solution de l'équation.
On remarque qu'il y a plusieurs couples qui vérifient l'équation 2x + 2y = 100. Donc l'équation 2x + 2y = 100 a plusieurs solutions

**Pour mieux assimiler**
Soit l'équation 2x - y = 5
1) les couples suivants sont-ils solutions de cette équation ? (1 ; -4) ; (-4 ; 1) (2 ; 5) (3,2 ; 1,4) (√2 ; √2)
2) Soit l'équation x + 3y = 6, les couples (m ; 3) et (5 ; n) sont solutions de cette équation. Calculer les réels m et n.

**Résolution algébrique d'une équation du premier degré à deux inconnues réelles**

Soit à résoudre l'équation $4x - 5y = 3$ par calcul.
$4x_o - 5y_o = 3$ donne $x_o = (5y_o + 3)/4$.
A chaque réel $y_o$ on trouve un réel $x_o$ donc il y a une infinité de solutions pour l'équation
$4x - 5y = 3$ qui sont les couples $((5y_o + 3)/4 ; y_o)$, on aurait pu donner à x une valeur quelconque $x_o$ et calculer $y_o$ on trouvera les couples $(x_o, (4x_o - 3)/5)$

## III.4.3 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues »

***L'introduction officielle de l'objet d'enseignement « système de deux équations à deux inconnues***

Dans le manuel de 1993, l'objet d'enseignement systèmes d'équation est introduit à travers un problème concret dans une problématique de résolution graphique. Le système numérique qui modélise la situation évoquée admet une solution unique qui apparaît comme réponse à la question : « Quelles sont les coordonnées des points qui appartiennent en même temps aux deux droites représentations graphiques des solutions des deux équations trouvées ? »

**Résolution graphique d'un système.**
Dans une ferme, un enfant s'amuse à compter les yeux et les pattes de ses poules et de ses lapins. Il trouve 22 pattes et 14yeux ; Quel est le nombre des poules et celui des lapins ?
Monia met en équation le problème et écrit :
$2x + 4y = 22$ et $2x + 2y = 14$
Que représente x ? Que représente y ?
Que représente chacune des deux équations précédentes ?
Vocabulaire et notation
$2x + 4y = 22$
Et
$2x + 2y = 14$
se note
$$\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$
Et est appelé système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.
Ce système est équivalent au système
$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver tous les couples (x,y) qui sont à la fois solutions de la première équation et solutions de la deuxième équation.
Ecris chacune des deux équations du système précédent sous forme : $y = \alpha x + \beta$ et trace dans un même repère (O, i, j) les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ représentant respectivement les ensembles solutions de la première équation et de la deuxième équation. Lis les coordonnées $(x_A, y_A)$ du point A commun à $(D_1)$ et $(D_2)$, vérifie que le couple $(x_A, y_A)$ est solution du système.
**Retenons**
Soit un système de deux équations à deux inconnues de la forme
$$\begin{cases} y = \alpha x + \beta \\ y' = \alpha' x + \beta' \end{cases}$$
ou $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ sont des réels donnés. On note S l'ensemble des solutions dans $IR \times IR$

Par contre, dans le manuel de 1998, l'objet « système d'équation » qui est aussi introduit pour modéliser un problème concret fait appel à une dialectique explicite entre registres arithmétique- algébrique –numérique. Cette dialectique semble servir à l'émergence de techniques algébriques de résolution contre d'autres techniques « numériques » ou « arithmético-numériques ».

**Introduction**

Dans une cage, il y a des poules et des lapins. Déterminer le nombre de lapins et le nombre de poules dans chacun des cas suivants (Donner toutes les possibilités).

1) il y a 16 pattes (tableau1).
2) il y a 6 têtes (tableau 2).
3) il y a à la fois 16 pattes et 6 têtes.

| 16 pattes | | 6 Têtes | |
|---|---|---|---|
| L | P | L | P |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |

Pour faciliter la recherche utiliser les tableaux comme les modèles ci-contre.

**1- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles**

**a-** Si vous désignez par x le nombre de lapins et par y le nombre de poules , combien y a-t-il de pattes et combien y a-t-il de têtes ?

Vous avez trouvé $(4x + 2y)$ pattes et $(x+y)$ têtes et si vous respectez les données du problème vous pouvez écrire :

D'après 1) $4x + 2y = 16$.

D'après 2) $x + y = 6$.

D'après 3) $4x + 2y = 16$ et $x + y = 6$ , vous obtenez deux équations à la fois.

Ce que vous pouvez encore écrire sous la forme $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$

et qu'on appelle « **Système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles x et y** »

**b- Solutions d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles.**

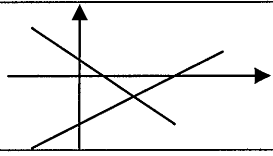
Dans la troisième question du problème, vous avez trouvé 2 lapins et 4 poules dans les deux tableaux c'est à dire $x = 2$ et $y = 4$ est une solution à la fois de l'équation $4x + 2y = 16$ et de l'équation $x + y = 6$.

On dit que le couple (2,4) est une solution du système $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$

***<u>Une technique graphique explicite et institutionnalisée</u>***

Dans le manuel de1993, la portée de la technique graphique s'étend à l'étude des trois cas d'ensembles de solutions. Dans chaque cas une correspondance est établie entre les représentations algébrique et graphique de l'ensemble des solutions du système donné. C'est en prolongement de l'étude des équations à deux inconnues que la technique est mise en avant, sans que les auteurs éprouvent le besoin d'une justification technologique.

<u>Activité2</u> Compléter le tableau suivant :

| Système de deux équations | Système équivalent | Représentation graphique | Ensemble des solutions |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ | $\begin{cases} y = -2x + 1 : (D1) \\ y = x/4 - 5/4 : (D2) \end{cases}$ |  | Le système admet une solution unique S= {(1, -1)} |
| $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - y/2 = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} y = \ldots. \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$ | | |
| $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x = 5 - (x + y) \end{cases}$ | $\begin{cases} y = \ldots. \\ y = \ldots. \end{cases}$ | | |

La technique graphique fait ensuite l'objet de décontextualisation et d'institutionnalisation, les auteurs du manuel présentent au moyen d'une paramétrisation les différents ensembles de solutions illustrés par les positions relatives des droites dans le plan :

Dans un repère (o, i,j) , on désigne par (D1) et ($D_2$) les droites représentant respectivement les ensembles solutions des équations $y = \alpha x + \beta$ et $y' = \alpha' x + \beta'$

| $\alpha \neq \alpha'$ | $\alpha = \alpha'$ | |
|---|---|---|
| ($D_1$) et ($D_2$) sont sécantes en A ($x_A$, $y_A$) | $\beta = \beta'$<br>($D_1$) = ($D_2$) | $\beta \neq \beta'$<br>$(D_1) \cap (D_2) = \emptyset$ |
| S = { ($x_A$, $y_A$)} | $S = \{(x, \alpha x + \beta) / x \in IR\}$ | $S = \emptyset$ |
| Le système admet une solution, unique | Le système admet une infinité de solutions. | Le système n'admet pas de solutions. |

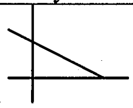
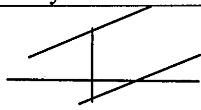
On retrouve les mêmes caractéristiques de ces organisations mathématiques autour de la résolution graphique dans le manuel de 1998, il n'y a plus de discours technologique autour de la technique graphique, les auteurs du manuel se contentent de décrire les sous tâches qui se rapportent à la représentation des solutions de chacune des équations.

**4- Résolution graphique d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.**

$\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$

est le système que vous avez trouvé dans le problème des lapins et des poules.
Dans le chapitre « Equations du premier degré à deux inconnues », vous avez appris que :
L'ensemble des points de coordonnées les solutions de l'équation 4x + 2y = 16 est une droite Δ.
L'ensemble des points de coordonnées les solutions de l'équation x+ y = 6 est une droite Δ'.
Si vous tracez les droites Δ et Δ' dans un même repère cartésien (o, i, j) vous obtiendrez les représentations graphiques suivantes des deux droites.
Le point d'intersection des deux droites est le point S de coordonnées (2,4).

La portée de cette technique s'étend à l'étude des cas particuliers de systèmes qui n'admettent pas de solutions ou qui admettent une infinité de solutions.

| **Exemple 1**<br>5x -3y = 6<br>10x -6y = 12 | **Exemple 2**<br>x -2y = 2<br>x -2y = -6 |
|---|---|
| <br>Δ |  |
| Le système admet une infinité de solutions qui sont aussi solutions d'une seule des deux équations. | Δ : x -2y = 2 ;<br>Δ' : x -2y = -6. Δ et Δ' sont strictement parallèles, le système n'a pas de solutions. |
| Le système<br>5x -3y = 6<br>10x -6y = 12<br>Si je multiplie les deux membres de l'équation (1) par le réel 2 alors le système est équivalent à la seule équation du premier degré à deux inconnues réelles (E) : 10 x -6y = 12 donc les équations (1) et (2) ont le même ensemble de solutions. Graphiquement, les solutions des équations (1) et (2) sont représentées par la même droite Δ. | Le système de l'exemple x -2y = 2,<br>x -2y = -6 n'a pas de solution, les équations x -2y = 2 et x-2y = -6 n'ont pas de solutions en commun. Graphiquement, les solutions des équations sont représentées par deux droites strictement parallèles. Les deux droites ont une intersection vide alors le système n'a pas de solution. |

### ***Une problématisation explicite des techniques algébriques***

Tout comme le manuel de 1993, celui de 1998 accorde une importance au contrôle logique des solutions, on peut voir le souci des auteurs à justifier les règles de conservation des systèmes d'équation par condition nécessaire et en s'appuyant sur la notion de « systèmes équivalents » avant de passer à la description des différentes méthodes de résolution algébrique.

**b- Systèmes équivalents :**
Soit le système

$$(S)\begin{cases} x+y = 3/2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

J'ajoute (-x) aux deux membres de l'équation (1) et y-3 aux deux membres de l'équation (2), j'obtiens le système suivant :

$$(S')\begin{cases} y = 3/2 - x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

(S) et (S') ont le même ensemble de solutions. On dit que les systèmes (S) et (S') sont équivalents.
Je remplace y dans l'équation (3) par 2x -3, j'obtiens le système

$$(S'')\begin{cases} 2x - 3 = 3/2 - x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

(S') et (S'') ont le même ensemble de solutions donc ils sont équivalents.
**Définition**
*Deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues réelles sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.*

Une fois ce discours technologique est prononcé, les trois techniques algébriques, par substitution par élimination et par égalisation sont présentées à partir d'un seul exemple numérique qui est repris pour chaque méthode utilisée. Certaines traces d'un formalisme ensembliste continuent à figurer comme l'ensemble des solutions dans $IR^2$.

Nous présentons à titre d'exemple la méthode dite par « égalisation » :

**d- Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles (résolution par le calcul)**

Soit résoudre le système

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$$ où x et y sont des réels

**1- Méthode dite « par égalisation »**

J'exprime l'une des deux inconnues à l'aide de l'autre dans chacune des équations du système (S) (Dans l'exemple, j'exprime y à l'aide de x)

J'obtiens un système équivalents à (S) dont l'une des équations est du premier degré à une inconnue réelle (dans l'exemple, l'inconnue est x)

$S_{IR^2} = \{(2,4)\}$

## III.4 4 Du point de vue des organisations didactiques et de leur incidence sur la topogénése

***<u>Une nouvelle répartition explicite des topos professeur/élève</u>***

Le manuel de 1998 apparaît déjà sous une nouvelle forme, qui met en avant certains moments de l'étude et un intérêt relativement important pour les activités destinées à l'élève en amont du cours destiné à fixer les savoirs enseignées autour des notions données. Ces activités sont souvent accompagnées de solutions détaillées, qui font explicitement apparaître les topos du professeur et de l'élève. Ainsi, l'élève est amené à résoudre la situation évoquée par l'activité tandis que les lignes directrices de l'étude pour l'enseignant sont indiquées à travers les solutions proposées à ces activités. Ce nouvel ajustement peut être pris au sens d'une « retouche » des organisations mathématiques dans le sens définit par Chevallard (2001)

« Le problème de l'installation dans un cours d'études d'une organisation mathématique inédite s'apparente à celui qui surgit lorsque, de manière beaucoup moins ambitieuse, on entend seulement « retoucher » une organisation mathématique déjà installée. Semblable manœuvre a été réalisée mainte fois depuis le début des années 1980 afin de mieux ajuster le cours d'études à l'élève. De tels ajustements ont pris surtout la forme d'allègements, par suppression de quelques organisations mathématiques, et par élagage de nombre d'entre elles. Or, en modifiant ainsi les contenus mathématiques, on influe nécessairement sur le *topos* des professeurs.». (Chevallard 2001, p.27).

On peut aussi faire l'hypothèse qu'il s'agit d'une nouvelle manière de diriger l'étude accordant plus de place à l'élève dans l'activité d'enseignement tout en garantissant une certaine économie pour l'enseignant dans sa gestion du savoir à enseigner .

## III.5 La période de la « réforme moderne » (Programmes des années 2003)

### III.5.1 Contexte institutionnel et Organisation du domaine de l'algèbre enseignée

En 2004, de nouveaux programmes[15]rentrent en application élaborés en 2002, et issus d'une réforme complète de l'enseignement tunisien dans l'ensemble des disciplines. Au-delà des idées directrices sur le savoir à enseigner, c'est surtout une nouvelle manière d'enseigner les mathématiques qui se met en place et qui vient répondre à des buts sociaux assignés à l'enseignement. La loi d'orientation de l'éducation (2002) confère à l'école les missions suivantes :

« ...assurer aux apprenants une formation solide, équilibrée, multidimensionnelle et les aider à maîtriser les savoirs et à acquérir les compétences qui les préparent à apprendre tout au long de la vie ; à participer effectivement à la vie économique, sociale et culturelle ; et à contribuer à la construction d'une société démocratique, capable de suivre le rythme de la modernité et du progrès » (Loi d'orientation de l'éducation, juillet 2002).

Dans le discours accompagnant cette nouvelle réforme, on voit apparaître des critiques contre un enseignement « cloisonné », « trop chargé », débouchant sur des pratiques routinières et pas assez innovantes , légitimant en quelque sorte la nouvelle rhétorique du changement. Il a suffit, comme le souligne Assude (2004) d'évaluer le curriculum mis à l'épreuve de la classe :

« Le curriculum officiel à un moment donné est le résultat d'un certain nombre de négociations entre acteurs sociaux qui légitiment politiquement ou « scientifiquement » les choix des contenus et les formes d'étude .Mais la recherche d'un équilibre et d'une stabilité sur le long terme apparaissent comme des facteurs essentiels dans l'implantation d'un curriculum malgré les résistances ou les adhésions des acteurs. Les tendances du changement se dessinent effectivement lorsque ce curriculum est mis à l'épreuve de la classe. Quels sont les effets des changements ? Les effets attendus se sont-ils produits ? Y a t-il d'autres effets inattendus ? » (Assude 2004, p.326).

Les promoteurs de la « réforme moderne » mettent en avant des effets négatifs de l'ancienne réforme que nous synthétisons en trois points :

***Une prédominance de l'aspect quantitatif dans les programmes scolaires*** qui entraîne des bouleversements au niveau de la pratique, à distinguer (dans la surcharge des

[15] Le système éducatif s'organise désormais en :
- un enseignement de base obligatoire qui constitue un cursus complet de neuf ans, organisé en deux cycles complémentaires, et dans lequel toutes les disciplines sont enseignées en langue arabe.
-Un enseignement secondaire d'une durée de quatre ans, organisé en une année de tronc commun et de trois années dans l'une des filières du cursus, et dans lequel les disciplines scientifiques, techniques et économiques sont enseignées en français

matières) ce qui est fondamental de ce qui est secondaire conduisant ainsi à une démarche linéaire des pratiques scolaires :

« La part des activités de synthèse est réduite à la portion congrue. Ainsi les objectifs partiels s'accumulent et les activités d'apprentissage se multiplient sans aucune complémentarité » (Ecole de demain, octobre 2002).

***Un cloisonnement des disciplines*** qui débouche sur une fragmentation et un morcellement des connaissances évoqué par Chevallard (1991)

« Le cloisonnement des disciplines et le découpage d'une même discipline en différents domaines d'activité qui conduisent fatalement au morcellement de l'apprentissage et à l'émiettement des connaissances. Il ne faut pas s'étonner dès lors que les acquis des élèves soient bien en deçà de ce que chacun était en droit d'espérer lorsque la réforme a vu le jour en 1991. ».

***Un niveau faible des élèves qui*** malgré la sélectivité jusque là pris en compte, ne garantit pas vraiment une formation de qualité pour les élèves tunisiens:

« La plupart d'entre eux manifestent en effet des faiblesses évidentes dans le domaine des langues et des mathématiques que traduisent les difficultés qu'ils éprouvent à communiquer, à rédiger, à résoudre des problèmes. Diverses évaluations internes et externes, ont attiré l'attention sur cet état de fait. » (Ecole de demain, octobre 2002).

Ces critiques vont jusqu'à remettre en question la conception des documents officiels, qui semblent limiter la prise de décision chez l'enseignant et réduire sa marge d'initiative, entraînant une homogénéisation des pratiques et une routinisation contraignante qui stabilise en quelque sorte l'état du système institutionnel et empêche son évolution :

« Le recours systématique à des guides pédagogiques assez contraignants qui, entre autres des effets pervers
*ont uniformisé les pratiques enseignantes, à tel point que telle leçon de calcul ou de grammaire, par exemple, était faite le même jour, à la même heure, de la même manière, dans toutes les écoles du pays.
* ont inhibé progressivement l'esprit d'initiative des enseignants, pour qui bien faire son travail se réduisait à reconduire avec fidélité le contenu des fiches pédagogiques proposées dans le guide du maître.
Il en a été de même au niveau des établissements dont la multiplication rapide a conduit à la nomination de jeunes directeurs inexpérimentés à qui il fallait expliquer les procédures et montrer la voie à suivre, dans des circulaires détaillées, de plus en plus nombreuses, émanant du Ministère. Le résultat en a été la réduction continue de la marge d'initiative et de manoeuvre dans les établissements et, à l'inverse, l'accroissement considérable des prérogatives des structures centrales. Cette situation, qui déresponsabilise les acteurs principaux du système éducatif, a naturellement des incidences négatives sur le fonctionnement de l'institution scolaire, ainsi que sur son rendement. » (Ibid.).

Ainsi de nouvelles exigences pour l'enseignement des mathématiques, sont préconisées, une réflexion ***épistémologique sur les contenus des programmes*** semble s'imposer à la vue d'une algorithmisation des techniques et d'une focalisation sur les aspects calculatoire et formels, au détriment du développement de l'esprit d'analyse et de synthèse dans un contexte de résolution de problèmes et des situations -problèmes :

« A une époque où le volume des connaissances double tous les quinze ans et où les sources du savoir se multiplient et deviennent de plus en plus accessibles, retirant ainsi à l'école son monopole en la matière ; il serait erroné, voire dangereux, de continuer d'inculquer aux élèves des masses de connaissances, dans un nombre considérable de disciplines, à un rythme qui favorise la mémorisation et l'application quasi mécanique des règles et des algorithmes plutôt que la mise en action des processus d'analyse, de synthèse et de résolution des problèmes. » (Ibid.).

Ainsi en première année du secondaire, les rapports institutionnels aux objets algébriques semblent évoluer dans un contexte qui offre des possibilités de disposer d'applications internes et externes aux mathématiques.

« A travers des situations familières et non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement, les élèves approfondiront leur compréhension des concepts mathématiques, intégreront leurs connaissances et leurs habilités dans divers domaines mathématiques pour résoudre des problèmes. De même les élèves développeront leurs aptitudes à utiliser différentes approches de recherche, à élaborer des stratégies de résolution, à modéliser des situations réelles et à persévérer dans leurs efforts. » (Ibid.).

Ce choix des applications semblent en grande partie conditionné par les rapports existants entre les mathématiques et d'autres domaines : sciences physique, sciences économiques et sociales...Par ailleurs, l'un des soucis de la réforme « moderne » de l'enseignement est celui de faire évoluer le secteur de la technologie, de l'information et de la communication considéré comme un auxiliaire puissant de l'apprentissage :

« Les formidables ressources que recèlent les nouvelles technologies en termes de savoirs, mais aussi de moyens d'accès direct à ces savoirs, peuvent aider à développer, beaucoup plus rapidement et facilement qu'avec des moyens classiques, des compétences variées de type cognitif, et en particulier méthodologique (savoir chercher une information ; savoir constituer un dossier autour d'un thème donné...) ; et de type socio-affectif (autonomie, curiosité, etc.) ; compétences nécessaires pour forger le profil du sortant de l'école de demain qui allie souplesse d'esprit, capacité d'adaptation, sens de l'initiative et goût de la recherche des solutions inédites et du travail bien fait ».(ibid.).

D'où dans les programmes de première année, on voit apparaître des injonctions de la forme :

« A travers des activités numériques, algébriques, géométriques et statistiques, les élèves se familiariseront avec l'outil informatique et développeront leurs aptitudes à utiliser la calculatrice ou des logiciels dans leur travail de recherche, de prospection et de contrôle. De même, les élèves développeront leurs aptitudes à utiliser l'outil informatique comme moyen d'échange et de communication de l'information». (Ibid.).

Suite à ces volontés exprimées dans les directives officielles, **l'accent est mis sur l'organisation de l'étude** pour développer des capacités intellectuelles chez les élèves et leur offrir plus d'autonomie, parallèlement à l'acquisition de compétences pertinentes, solides et durables :

« l'abandon définitif de méthodes et de pratiques, encore en usage dans nos institutions éducatives, qui poussent à l'accumulation des connaissances, lesquelles sont rapidement oubliées parce que peu susceptibles d'être exploitées à bon escient, au moment opportun, dans des situations authentiques de communication ou de résolution de problèmes. L'alternative aux programmes surchargés de matières, pour l'acquisition desquelles maîtres et élèves engagent chaque année une course vaine, est contestable ment l'approche par compétences qui permet de déterminer, au regard des apprentissages antérieurs et ultérieur les savoirs et les savoir-faire essentiels. » (Ibid.)

Mais l'implantation de ce nouveau curriculum impose sans aucun doute, une réflexion sur les pratiques enseignantes dans le but de promouvoir **un nouveau modèle de professionnalité**, de ces nouvelles orientations, il découle que :

« Recycler, mettre à niveau, actualiser les connaissances des enseignants, initier à de nouvelles approches et techniques pédagogiques ; ce sont là des services essentiels que l'institution doit assurer pour élever le niveau de qualification des enseignants. L'objectif à viser est la professionnalisation progressive du corps enseignant. Des enseignants professionnels, cela veut dire des maîtres qui connaissent à la fois la science et l'art de leur métier ; capables de construire et de mettre en oeuvre un projet pédagogique intégrant les spécificités du contexte où ils évoluent ; capables aussi de planifier, d'évaluer, de gérer des situations pédagogiques diverses ; de donner aux élèves le goût d'apprendre ; de réguler leur enseignement à la lumière des diagnostics fréquents qu'ils effectuent » (ibid.).

Cette idéologie de l'élève « au centre » des « apprentissages » suppose la création de nouveaux outils didactiques. On ne voit plus apparaître les deux parties « Algèbre » et « Géométrie » des directives de 1998, le programme est constitué de sous parties intitulées « Activités numériques », « Activités algébriques », « Activités géométriques », Activités statistiques » « Activités dans un repère » et « Activités sur les mesures des grandeurs ». Dans le domaine consacré aux « Activités algébriques », on voit apparaître les secteurs et thèmes d'études que nous synthétisons dans le tableau suivant

| **Secteurs d'études** | Identités remarquables | Fonctions linéaires - Fonctions affines | Equations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle | Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles ». |
|---|---|---|---|---|
| **Thèmes d'études** | Addition, soustraction et multiplication des expressions algébriques.<br>• Calcul de la valeur numérique d'une expression littérale.<br>• Développement, factorisation et simplification des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables. | Détermination de l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel.<br>• Détermination de l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.<br>• Modélisation de situations réelles menant à des fonctions linéaires ou affines. | • Résolution des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue.<br>• Détermination du signe d'un binôme du premier degré.<br>• Modélisation de situations réelles menant à des équations et des inéquations. | • Résolution des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.<br>• Modélisation de situations réelles menant à des équations, des systèmes d'équations. |

Les concepteurs du programme mettent particulièrement l'accent sur la modélisation algébrique et le discours tenu sur les contenus disciplinaires est formulé en types de tâches assignées à l'élève. L'analyse du manuel officiel actuellement en vigueur, permettra de mieux décrire les rapports institutionnels développés à l'algèbre, particulièrement autour des thèmes d'étude « équations à deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues ».

## III.5.2 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « Equations du premier degré à deux inconnues »

***Une approche par la modélisation et l'amorce d'une approche fonctionnelle et technologique***

Dans le manuel officiel, les auteurs organisent l'étude selon deux domaines intitulés « Travaux géométriques » et « Travaux numériques » au sein duquel apparaît l'étude conjointe du numérique, du calcul algébrique, du traitement des équations, des inéquations et des fonctions ainsi que l'exploitation de l'information.

La nouvelle disposition des sujets d'étude au sein des thèmes considérés laisse entrevoir des interrelations entre les différentes organisations mathématiques autour des objets algébriques :

| Thèmes d'études | Sujets d'études |
|---|---|
| Activités algébriques | Expressions littérales.<br>Identités remarquables.<br>Egalité de deux expressions, mesures de grandeurs, lecture graphique. |
| Fonctions linéaires | Fonction linéaire.<br>Représentation graphique d'une fonction linéaire.<br>Lecture graphique (Détermination du coefficient, construction d'un segment de longueur donnée). |
| Equations et inéquations du premier degré à une inconnue | Equations du premier degré à une inconnue.<br>Résolution.<br>Recherche d'une quatrième proportionnelle.<br>Mettre un problème en équation.<br>Equations se ramenant au premier degré à une inconnue.<br>Inéquations.<br>Signe de a x+b. |
| Fonctions affines | Fonctions affines.<br>Taux d'accroissement.<br>Représentation graphique.<br>Lecture graphique. |
| Système de deux équations du premier degré à deux inconnues | Equation du premier degré à deux inconnues.<br>Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.<br>Utilisation du graphique pour lire les solutions d'un système.<br>Modéliser un problème par une équation ou un système d'équations du premier degré à deux inconnues. |

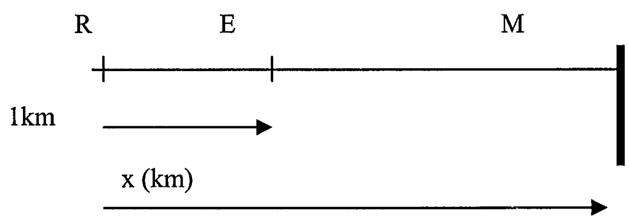
On relève au sein de cette nouvelle organisation de l'étude une nouvelle association des secteurs consacrés aux équations et inéquations et une intercalation des thèmes d'étude : fonctions linéaires / équations et inéquations du premier degré à une inconnue / fonctions affines / système de deux équations linéaires à deux inconnues. Les secteurs « Equations « et « Fonctions » apparaissent plus entremêlés et imbriqués au travers de certains concepts comme la linéarité, la proportionnalité (dans les activités numériques et la recherche d'une quatrième proportionnelle dans le thème consacré aux équations à une inconnue) et le graphique.

L'aspect graphique qui apparaît comme un sujet d'étude permanent au sein du domaine d'étude, semble jouer un rôle important dans l'imbrication des différents thèmes et secteurs, particulièrement dans les interrelations entre équation et fonction. Par exemple, à la fin de chaque chapitre, on retrouve l'intitulé « lecture graphique » suivi d'une situation qui convoque l'utilisation du graphique pour résoudre le problème posé.

« Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine ; Déterminer l'expression d'une fonction linéaire ou affine à partir de sa représentation graphique ; Déterminer graphiquement le point d'intersection éventuel de deux droites ; Résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à une inconnue ;• Résoudre graphiquement une équation du premier degré à deux inconnues En particulier, les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques ; les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation. » (Programmes officiels, 2004).

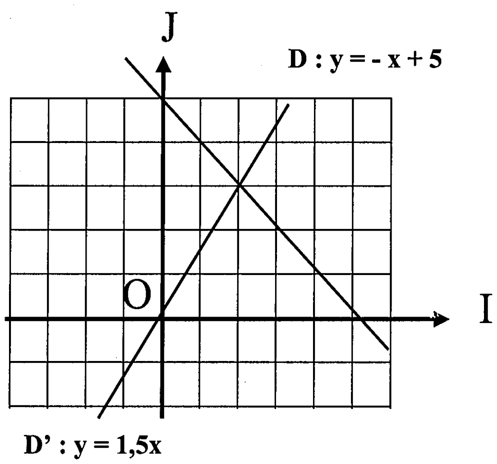
Ainsi pour illustrer cette volonté des auteurs à articuler les objets de savoir algébriques équation, inéquations et fonction, nous présentons deux extraits de situations proposées aux élèves au sein du thème d'étude « Fonction affine » avant même d'introduire les notions d'équations et des systèmes d'équations à deux inconnues .Cette imbrication des objets de savoir met en jeu une dialectique entre le registre graphique et celui des écritures fonctionnelles, dans un contexte de modélisation de situations intra ou extra_-mathématiques . Le graphique apparaît dans ce contexte bien plus qu'un ostensif, il donne lieu à un travail spécifique. Il est perçu comme devant servir à l'*illustration* des phénomènes mathématiques.

**Situation : la vitesse du son**
Un émetteur E est situé entre un récepteur R et un mur M.



Un son est émis par E. Le récepteur R reçoit directement le son émis par E, ainsi que l'écho qui résulte de la réflexion du son sur le mur. On désigne par t(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance ER. On désigne par t'(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance EM +RM.
1-a) Sachant que la vitesse du son est 340m/s, exprimer t(x) en fonction de x.
b) Représenter la fonction affine associée et colorer les points qui conviennent aux données.
2) Exprimer t'(x) en fonction de x.
3) Sachant que le récepteur a reçu l'écho quatre secondes après le son, calculer ER.
**Stratégie de résolution**
1-a) Evident puisque la vitesse du son est constante.
b) Considérer la fonction affine f qui à tout réel x associe t(x).
Représenter f et colorer les points M d'abscisses x tels que 0□ x□1
2- Remarquer que la distance EM +RM est le produit du temps mis pour parcourir cette distance par la vitesse du son.
3- Ecrire la relation qui lie t'(x) et t(x) dans ce cas.

**Résolution graphique d'une équation ou d'une inéquation**
Situation




Dans un repère (O, I, J), on a tracé les droites D et D' d'équations respectives y = 1,5x et y = -x +5
1- Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des droites D et D'.
2- a) Quel est l'ensemble des points de la droite D qui sont en dessous de D' ?
b) Quel est l'ensemble des points de la droite D qui sont au dessus de D' ?
3- Ecrire des inéquations qui illustrent les situations de la question précédente.
Stratégie de résolution
2-a) Si M et N sont deux points respectifs de D et D' de même abscisse, alors M est en dessous de N si l'ordonnée de M est inférieure ou égale à l'ordonnée de N.
Déplacer une droite parallèlement à l'axe des ordonnées et en déduire la réponse à la question.
b) Utiliser le même procédé qu'en a).
3- Poser f (x) = 1,5x et g (x) = - x + 5.
Si M et N sont deux points respectifs de D et D' de même abscisse x, alors M est en dessous de N équivaut à f(x) ≤ g(x). Conclure

Par ailleurs, la volonté d'introduire les TICE dans l'enseignement de la discipline suggérée dans les programmes actuels est concrétisée au niveau du manuel officiel, mais reste encore « discrète » et peu développée. En effet, cette introduction ne fait pas l'objet d'étude mais elle apparaît dans un contexte d'application, à la fin de chaque chapitre, dans la rubrique « Exercices et problèmes » sous l'intitulé : « Avec l'ordinateur ». Nous présentons un exemple en rapport avec les thèmes d'études équations et systèmes d'équations à deux inconnues :

**Avec l'ordinateur**
A l'aide d'un logiciel :
1_- Tracer un repère (O, I, J).
2-a) Placer les points A(-2, 3) et B(2, -1).
b) Tracer la droite (AB).
c) La droite est la représentation graphique d'une fonction affine, la déterminer.
3- On considère la fonction affine g définie par g(x) = 2x – 3.
Soient C (0, y), D (1, y') deux points de la représentation graphique de g.
a) Déterminer y et y'.
b) Placer C et D.
c) En déduire la représentation graphique de g.
4-Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Si oui lire les coordonnées du point de leur intersection.
5- En déduire la résolution graphique du système

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Le thème consacré aux inéquations du premier degré à une inconnue joue un rôle important dans cette interrelation amorcée entre équation et fonction. L'une des raisons de la présence des inéquations dans le contexte des équations ne semble pas seulement la modélisation des problèmes de la vie courante et un enseignement relatif à la mise en équation comme dans la réforme précédente. Tout comme Durand-Guerrier (2000) l'évoque dans un travail centré sur la notion de variable et d'inconnue, ce rapprochement est susceptible d'alimenter un point de vue davantage dynamique sur l'algèbre enseignée, et de permettre une relation privilégiée entre équation et fonctions :

« La question du signe de a x + b selon x ne peut guère être séparée de celle de la résolution d'inéquations, mais la présenter en lien avec l'étude des fonctions affines correspondantes et de leur représentation graphique est un moyen de favoriser le point de vue variable. » (Durand-Guerrier, 2000 p.96).

Certains commentaires des auteurs du manuel mettent par ailleurs en avant une volonté de faire apparaître une approche fonctionnelle de l'algèbre qui est explicitement reliée à d'anciens problèmes issus de la cinématique (cf. période classique) :

« Fonctionnalité : Le besoin de chercher à quantifier certains phénomènes tels la chaleur, la densité, la vitesse et la distance a amené les mathématiciens à établir une correspondance entre une quantité variable et la loi de variation de cette quantité »
De l'étude des mouvements à l'étude des trajectoires : L'étude des mouvements est l'un des plus importants sujets traités par les savants. C'est ainsi que, la plupart des fonctions introduites au XVIIIème siècle ont été d'abord étudiées comme des courbes, celles-ci étant elles-mêmes considérées comme trajectoires de points en mouvement. » (Manuel officiel, 2004).

Les constats faits nous amènent donc à supposer que la réforme moderne favorise « un point de vue variable », qui vient se substituer au « point de vue inconnue » dominant dans la réforme contemporaine au travers de l'interrelation entre les objets équation et fonction au sein du domaine consacré aux « travaux numériques ».

Nous analysons à présent les organisations mathématiques développées autour des équations à deux inconnues.

*Une « prolifération » des activités*

L'une des spécificités de cette réforme concerne **la « prolifération des activités » qui met en avant la mise en équation, en même temps que l'étude des objets algébriques.**

Ainsi, les équations du premier degré à deux inconnues sont introduites à travers trois activités qui occasionnent la mise en jeu simultanée de deux organisations mathématiques : une OM autour de la mise en équation et une OM autour de la résolution. Les techniques préconisées pour accomplir les tâches proposées restent « implicites » : on peut supposer qu'elles subsistent sous forme de règles du contrat didactique, spécifiques de la mise en équation et de la résolution algébrique de problèmes.

**Activité 1**

Deux dés équilibrés ont leurs faces numérotées de 1 à 6, on lance les deux dés et on fait la somme des nombres obtenus, on désigne par $x$ et $y$ les nombres qui apparaissent sur chaque face.

1-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 6 ?

b) Dénombrer alors tous les couples $(x, y)$.

2-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 10 ?

b) Dénombrer alors tous les couples $(x, y)$.

**Activité 2**

Amine dépense 100 dinars pour l'achat de cassettes et de CD.
Le prix d'une cassette est de 2.500 dinars et celui d'un CD est 15 dinars.

1. Modéliser la situation par une équation.
2. On suppose que Amine a acheté quatre cassettes, combien a-t-il acheté de CD ?
3. On suppose que le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.
4. On suppose que le nombre de CD achetés est égal à une fois et demi celui des cassettes. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.

**Activité 3**

On se propose de trouver deux nombres m et n tels que le tiers de leur différence est égal à leur somme.

1. Mettre le problème en équation
   1. Donner une valeur du couple $(m, n)$
   2. Le couple (3/5,11) répond-il au problème ?
   3. On suppose que n = 3. Trouver $m$.
   a. Donner cinq couples $(m, n)$ qui sont solutions du problème.
   b. Placer les points de coordonnées $(m,; n)$ dans le plan muni d'un repère (O ; OI ; OJ). Que remarque-t-on ?

On voit comment est installé le moment de la première rencontre avec l'objet « équation à deux inconnues » à travers la première question de l'activité 1 qui convoque une relation entre deux inconnues. La résolution de x+y = 6 fait l'objet de la seconde question. Mais le contexte concret évoqué par l'activité rend la résolution du problème, accessible par des techniques numériques simples: les inconnues correspondent à des variables à valeurs dans un sous ensemble fini de IN. L'élève peut ainsi résoudre le problème posé sans passer par l'écriture algébrique, de manière arithmétique. On peut donc se poser la question de la technique employée à partir de cette équation : substitution de valeurs numériques ou transformation de l'écriture x+y=6 en y = 6-x ou x= 6-y ? Quoiqu'il en soit, la résolution du problème ou de l'équation se résume à des tests de valeurs numériques dans un ensemble très limité. On est loin de l'ensemble infini de solutions d'une équation à deux inconnues classique dans IR. Par ailleurs, on peut se demander le sens que va prendre au travers de cette résolution, l'ostensif couple de nombres mis en avant par le biais d'une relation symétrique entre x et y.

Dans ce contexte, au niveau de l'organisation de l'étude développée au sein du manuel, on voit mal comment articuler cette première activité avec le moment d'institutionnalisation préconisé autour de la résolution d'une équation à deux inconnues qui suppose une extension du domaine de résolution et donc le passage de IN à IR et du fini à l'infini d'autant plus que les techniques algébriques ne sont pas précisées par le manuel. :

L'équation a x +by +c = 0 ou a et b sont deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues, est appelée équation du premier degré à deux inconnues. Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vraie. Chaque couple est appelé solution de l'équation »

Les techniques sous-jacentes à la première activité et la troisième semblent s'organiser autour d'une résolution intermédiaire « entre algèbre et numérique ». En effet, l'énoncé se ramène à une équation du premier degré à deux inconnues mais les techniques de résolution algébriques ne paraissant pas faire l'objet d'un type de tâche particulier. Les questions posées renvoient davantage à des résolutions par « tâtonnement et essais successifs », d'autant plus que le contexte élémentaire des situations évoquées par ces activités peut légitimer ce choix.

Par ailleurs, le type de tâche qui se ramène à une mise en équation apparaît pour chaque activité proposée mais ne fait pas l'objet d'étude comme dans la réforme contemporaine. L'étude de la mise en équation du point de vue institutionnel apparaît plutôt comme processus de modélisation. La technique n'est pas rendue visible, ce n'est que dans la rubrique « *mobiliser ses compétences* » où nous voyons apparaître, dans la stratégie de résolution proposée pour un exemple, le découpage générique de la technique en sous tâches :

**Situation1**
Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme augmenté de 2. Représenter graphiquement l'ensemble des couples de nombres qui répondent au problème.
**Stratégie de résolution**
- Faire le choix des inconnues.
- Mettre le problème en équation.
- Résoudre graphiquement l'équation.
- Vérifier et interpréter le résultat.

***Une évolution « implicite » des techniques de résolution***

Les trois activités proposées autour de ce thème d'étude, comme nous avons pu le constater, suggèrent **une évolution de l'organisation mathématique enseignée autour de la résolution d'une équation à deux inconnues. Cette évolution est en rapport avec une progression dans l'étude des** types de tâches donnés à voir :

* « *Résolution par essai de couples numériques d'entiers simples* », convoquée pour la première fois à travers les tâches : « Dénombrer alors tous les couples (x, y) » « Donner une valeur du couple (m, n) », «. Donner cinq couples (*m, n*) qui sont solutions du problème. ». Cette technique de résolution s'appuie sur le registre numérique, amorçant en douceur le passage d'un raisonnement de type arithmétique à un raisonnement de nature « algébrique »

*« *Résolution algébrique* », « guidée » sans qu'il y ait de formalisme sous-jacent à la résolution convoquée implicitement à travers les tâches proposées dans l'activité 2, qui mettent particulièrement l'accent sur les substitutions numériques et algébriques.

*« *Résolution graphique* » convoquée dans l'activité 3 à travers le type de tâche

« Placer les points de coordonnées (*m, n*) dans le plan muni d'un repère (O, i, j). Que remarque-t-on ? » .

Ainsi, on voit comment les auteurs du manuel souhaitent voir à travers cette nouvelle organisation de l'étude des dialectiques entre les différents registres de représentations sémiotiques mais cette articulation reste « implicite». Par exemple, les conversions entre les registres du langage naturel, algébrique, graphique sont convoquées par les tâches proposées mais ne font pas l'objet d'explicitation.

Cette particularité dans le rapport institutionnel développé autour de cet objet algébrique renvoie visiblement à une tendance de cette réforme : la restriction du discours enseignant, qui se réduit à une présentation des objets algébriques nouveaux mis en jeu au fil des activités.

***L'absence d'un discours technologique autour de la résolution***

Ce qui frappe dans l'étude des praxéologies installées dans le manuel, c'est qu'on ne relève aucun discours générique tenu sur la résolution, aucun discours technologique ne semble donc tenu[16] : ni sur les objets algébriques eux-mêmes (qui apparaissent presque « naturalisés » au fil des exemples, des exercices rencontrés pour une part), ni sur les dialectiques entre différents registres numérique, algébrique et fonctionnel, pourtant nettement suggérées par les activités mises en avant dans ce manuel officiel.

### III.5.3 Description des organisations mathématiques relatives au thème d'étude : « systèmes d'équations à deux inconnues »

Pour ce second thèmes d'étude, nous retrouvons les mêmes caractéristiques relevées pour les organisations mathématiques autour des équations à deux inconnues à l'exception du fait que l'on relève une « masse » d'activités (10 activités) pour introduire l'objet « système de deux équations du premier degré à deux inconnues », et trois autres en rapport avec le type de tâche : « utiliser un graphique pour connaître les solutions éventuelles d'un système ».

Toutes ces activités, à l'exception de l'activité 13 (un exemple de système d'équations), mettent toujours en jeu l'étude simultanée des organisations mathématiques autour de la mise en équations et de la résolution. Le champ des problèmes proposés parait très vaste : des problèmes concrets (argent), puisés dans le registre numérique, algébrique, du cadre des grandeurs et d'autres contextes extra mathématiques. Nous citons à titre d'exemple, l'extrait suivant du manuel :

**Activité 4**

Une boite contient R boules rouges et N boules noires telles que

- Le triple de N est égal à R diminué de 3.
- Le quadruple de N est égal à R augmenté de 4.

1- Mettre le problème en équations.
2- Déterminer R et N.

**Activité 9**

Un grand père décide de partager la somme de 800 dinars entre ses deux fils, proportionnellement au nombre de leurs enfants respectifs.

On sait que le fils aîné a trois enfants et le fils cadet a deux enfants.

[16] Abdelajaouad fait un constat similaire sur l'absence de discours technologique autour des savoirs mathématiques enseignés sur la démonstration : « L'étude que nous venons d'esquisser montre bien l'absence dans les manuels nouveaux de toute démonstration formelle, absence des termes communément associés à ce type de discours (« démonstration », «hypothèse », « conclusion »), absence des connecteurs logiques (« donc », « or », « car », « parce que », « mais »), absence de toute argumentation, de toute justification des assertions énoncées ou des constructions prescrites, instillation dans l'esprit du lecteur de l'inutilité de l'argumentation en lui donnant le sentiment que les réponses aux questions posées sont faciles et immédiates.» (Abdeljaouad 2006, p .11).

1- Mettre le problème en équations.
2- Déterminer la somme d'argent que reçoit chacun des fils.

**Activité 7**

Un pharmacien dispose de deux solutions $S_1$ et $S_2$, d'alcool iodé à 20% et à 8% ; il veut mélanger une certaine quantité de $S_2$ de façon à obtenir une troisième solution d'alcool iodé à 15% et de volume un litre. On désigne par x et y les quantités (en litres) de chacune des solutions $S_1$ et $S_2$ nécessaires à la fabrication du mélange.

1- Mettre le problème en équations.
2- Déterminer les quantités (en litres) de chacune des solutions S1 et S2 nécessaires à la fabrication du mélange.

Les types de tâches mises en jeu autour de la résolution des systèmes d'équations amorcent au fil des activités une progression vers les techniques algébriques. Ainsi dans la première activité (4), les deux relations stipulées dans l'énoncé se modélisent par un système de deux équations à deux inconnues, mais les techniques de résolution algébrique n'ayant pas été encore introduites, la consigne indique que le système obtenu est à résoudre par « tâtonnements et essais- erreurs ».

Ce n'est qu'à la suite des techniques de résolution algébrique sont proposées, toujours à partir d'une mise en équations, des situations évoquées par les activités 5 et 6. Celles-ci suggèrent un découpage de la technique en sous tâches, que l'élève est supposé résoudre par une application directe des règles de calcul formels:

**Activité 5**

On se propose de trouver deux nombres m et n tels que

- leur somme est égale à 96.
- en ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient le double de l'autre.

1- Ecrire deux équations qui traduisent les deux conditions.
2- a)Exprimer m en fonction de n dans l'une des deux équations.
b) Remplacer m par l'expression trouvée dans l'autre équation et résoudre l'équation obtenue.
3- En déduire m et n.

**Activité 6**

Cinq cahiers et deux stylos coûtent 3300 millimes.
Trois cahiers et quatre stylos coûtent 2400 millimes.
1- Montrer que le système suivant modélise la situation

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 & (1) \\ 3x + 4y = 2400 & (2) \end{cases}$$

2-a) Multiplier les deux membres de l'équation (1) par 3.
b) Multiplier les deux membres de l'équation (2) par -5.
3- Additionner les deux équations obtenues et en déduire y.

Les auteurs se contentent par la suite d'une simple description en langage naturel des techniques de résolution algébrique par élimination et par substitution des systèmes d'équations mais, à aucun moment de l'étude, nous ne trouvons pas de trace d'un discours technologique susceptible d'outiller ces techniques de résolution. Aucune justification de l'emploi des transformations algébriques opérées sur les systèmes d'équations n'est mise en avant. Certains commentaires qu'on retrouve par la suite dans la rubrique « mobiliser ses compétences » laissent entrevoir le caractère « techniciste » des tâches proposées.

**Résoudre par substitution**

« - Exprimer une inconnue **en fonction de l'autre** à partir de l'une des deux équations.
-Remplacer dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée.
-Résoudre cette nouvelle équation.
-Déterminer, si elle existe, la (ou les) valeurs de l'autre inconnue. »

**Résoudre par élimination**

« - Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsqu'on additionne les deux équations obtenues, on obtient une équation à une seule inconnue.
-Résoudre l'équation trouvée.
-Déterminer, si elle existe, la (ou les) valeur(s) de l'autre inconnue. ».
« Utiliser la méthode de substitution quand il est facile d'isoler une inconnue »
« Utiliser la méthode par élimination quand les coefficients multiplicateurs sont faciles à trouver (parfois l'addition ou la soustraction des deux équations suffit). »

Cette nouvelle organisation de l'étude autour de la résolution des équations et des systèmes d'équations, fait disparaître toute trace de la notion d'équivalence qui était, objet d'enseignement pendant la période de la réforme contemporaine. Cet éloignement ressenti du savoir savant est d'ailleurs renforcé par la disparition de tout formalisme algébrique, qui accompagne la résolution des équations à deux inconnues ou des systèmes d'équations (par exemple l'ensemble de solutions $S_{IR}{}^{2,}$ ou encore la formulation de l'ensemble des solutions d'un système, qui admet une infinité de couples solutions) (pas très clair). En outre, les tâches de « vérification » qui interviennent dans le contrôle logique des solutions, ne font plus partie des organisations mathématiques développées autour des systèmes d'équations.

## *Des interrelations « discrètes » entre équations et fonctions*

Les dialectiques entre différents registres relevées autour du premier thème d'étude apparaissent également au fil des activités proposées pour le second thème. Ces dialectiques coïncident d'ailleurs avec des interrelations plus étroites que par le passé entre fonctions et équations : à travers notamment le lien fait entre la courbe représentative d'une fonction affine (qui a fait l'objet d'un thème d'étude au préalable) et l'équation à deux inconnues, qui vient légitimer la technique de résolution graphique d'un système d'équations. Les activités et les situations suivantes du manuel, l'illustrent bien :

A la sortie d'une machine fabriquant des pièces, on a comptabilisé le nombre de défauts trouvés sur chaque pièce.
La répartition des pièces selon le nombre de défauts est donnée dans le tableau ci-dessous.

| Nombres de défauts | 0 | 1 | x | 2 | y |
|---|---|---|---|---|---|
| Répartition en % | 60 | 10 | 12 | 10 | 8 |

On sait que la moyenne arithmétique de la série statistique ci-dessus est égale à 0,9.
Quelles devraient être les valeurs de x et y pour obtenir un nombre minimal de défauts.
**Stratégie de résolution**
Ecrire l'expression de la moyenne arithmétique de la série statistique.
En déduire l'équation qui traduit la situation.
Ecrire y en fonction de x.

**Problème posé par Newton**
Deux messagers A et B se mettent en route l'un vers l'autre, chacun partant d'un ville. On sait que,
- le messager A parcourt 7 lieues en 2 heures
- le messager B parcourt 8 lieues en 3 heures
- le messager B commence son voyage une heure plus tard que le messager A.

Combien de lieues A a-t-il parcourues avant de rencontrer B ?
**Stratégie de résolution**
- Faire une figure.
- Exprimer la distance d (t) que parcourt B en fonction du temps t.
- Exprimer la distance d' (t') que parcourt A en fonction du temps t'.
- Ecrire la relation entre d (t) et d' (t')
- Mettre le problème en équations. Résoudre.

Ces énoncés semblent hérités de la période de la contre réforme et sont pratiquement similaires à ceux retrouvés dans le manuel de l'époque, uniquement à la fin de l'ouvrage dans la partie intitulée « problèmes du premier degré ». Ils nourrissent visiblement une interrelation entre « fonctions affines » et « systèmes d'équations », toujours dans un contexte de résolution de problèmes concrets.

Contrairement à la réforme contemporaine, oǔ nous avons eu l'occasion de percevoir des techniques graphiques explicitées et dont la portée s'étendait même à l'étude de cas particuliers, articulant parfois les registres algébrique et graphique au sein de l'organisation mathématique, celles données à voir ici au fil des activités sont rendues quasi-invisibles et naturalisées. Plus généralement, le discours technologico-théorique apparaît restreint et concentré uniquement sur les savoirs algébriques. Seules trois activités sont proposées autour de cette organisation mathématique ponctuelle qui n'explicite pas véritablement ce qui est en enjeu dans la résolution graphique, notamment, le cas de l'infinité de solutions n'est pas traité au sein du « cours ».

**Utiliser un graphique pour connaître les solutions éventuelles d'un système**
**Activité 11**
Une salle de sport propose à ses clients les deux options ci-après.
Première option : le client paye 5 dinars par séance.
Deuxième option : le client paye un abonnement de 28 dinars puis 3 dinars par séance.
On se propose de déterminer graphiquement l'option la plus avantageuse, en fonction du nombre de séances.

1- Exprimer le prix p(x) à payer pour x séances selon la première option.
2- Exprimer le prix p'(x) à payer pour x séances selon la deuxième option.
3- Le plan est muni d'un repère (O, OI, OJ). Déterminer graphiquement le nombre de séances pour lesquelles les deux options sont équivalentes.

4- Discuter suivant les valeurs de x l'option la plus avantageuse.

**Activité 12**
Deux cyclistes partent en même temps, l'un d'une ville A pour aller vers une ville B et l'autre de la ville B pour aller vers la ville A. On sait que,

- La distance entre les deux villes est égale à 40 km et les deux cyclistes prennent la même route et roulent à vitesse constante,
- L'un parcourt le trajet en 3 heures et l'autre en deux heures.

1- Représenter graphiquement et sur un même repère les trajets des deux cyclistes.
2- Déterminer graphiquement l'heure à laquelle ils se croisent.

Comme nous pouvons le constater au niveau des organisations mathématiques développées autour du type de tâche « résolution graphique », l'aspect graphique est en lien avec le registre des écritures fonctionnelles, mais sans qu'il y ait une explicitation de ces liens. Les connaissances autour du travail graphique restent contextualisées et ne font pas l'objet d'institutionnalisation, laissant penser que les organisations mathématiques développées autour des fonctions affines qui font l'objet du chapitre précédent, suffisent à justifier les techniques mises en jeu autour de la résolution graphique des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations. Une imbrication des connaissances au travers d'interrelations entre thèmes d'études reste pour une grande part implicite.

### III.5 .4 Du point de vue des organisations didactiques et de leur incidence sur la topogénése

Comme nous l'avons évoqué dans la première partie de ce chapitre, l'étude du programme entré en vigueur en 2004-2005 et du manuel officiel révèle des bouleversements conséquents des organisations mathématiques et didactiques des savoirs mathématiques à enseigner. La majorité des activités et exercices proposés présentent des habillages « concrets »[17], qui répondent d'ailleurs aux ambitions utilitaristes affichées dans le programme. Ces activités suggèrent une part importante laissée à l'élève, notamment dans les premiers moments de l'étude (correspondant à la première rencontre et à l'exploration d'un type de tâches).

« Ces manuels se caractérisent par l'approche des concepts mathématiques par les activités au dépens du formalisme classique : énoncé, démonstration, applications » (Abdeljaouad 2006, p.1).

Cela va de pair avec le nombre important d'activités de découverte présentes et qui suggèrent une mobilisation et une conversion entre le registre du langage naturel et celui

[17] Soit « classiques » (type problème arithmétique), soit à caractère plus « interdisciplinaire » : avec des problèmes inspirés d'autres disciplines (physique, mécanique, etc.).

des écritures algébriques dans une étude simultanée des organisations mathématiques autour de la mise en équation et de la résolution.

« Ces manuels, conformes aux nouveaux programmes, se caractérisent par l'omniprésence d'activités dites de découverte (en 1e année). Ces activités modélisent des situations de la vie pratique et sont choisies dans des champs disciplinaires variés externes aux mathématiques (physique, astronomie, commerce, …) et internes nécessitant des efforts de conversion de registres et des traitements intra registres ; elles permettent d'aborder un nouveau concept ou une nouvelle proposition et en justifient l'introduction dans le savoir de l'élève ». (Ibid. p.6).

Cette manière « moderne » d'enseigner les mathématiques suggère un nouveau partage des rôles et des responsabilités entre élève et enseignant. Ce déplacement topogénétique déjà amorcé avec la réforme précédente de 1998 est renforcé au niveau des organisations didactiques développées dans le nouveau manuel officiel.

Cependant, la volonté de responsabiliser les enseignants devant une nouvelle forme d'étude ne légitime pas certains choix didactiques qui ne nous paraissent pas assez assumés, notamment celui concernant le statut des activités proposées qui n'est pas précisé ainsi que la nouvelle appréhension du statut de la mise en équation en tant que processus de modélisation. L'analyse de ces « activités » tend à montrer une diversité de statut des connaissances convoquées par les énoncés et une mise en fonctionnement de ces connaissances qui diffère d'une activité à une autre : nouvelles (relatives à un nouveau savoir à enseigner) ou plus anciennes, plus ou moins mobilisables ou disponibles (pour reprendre la distinction de Robert).

Par ailleurs, la mise en place de ces praxéologies mathématiques suppose entre autres une organisation des moments de l'étude or, à la vue des organisations développées, il serait étonnant de prétendre s'y retrouver sans avoir recours à la création de nouveaux outils didactiques comme une réorganisation du savoir outil/ objet, ancien / nouveau, dialectique entre registres … au niveau des pratiques d'enseignement.

# IV. Conclusions

A travers dans notre analyse des programmes et des manuels officiels de première année du secondaire tunisien, nous avons mis en avant des caractéristiques des rapports institutionnels à l'algèbre dominants pour chaque réforme. L'étude des organisations mathématiques et didactiques spécifiques de chaque période révèle des bouleversements dans les praxéologies mises en place visibles dans l'enseignement des deux objets

« équations à deux inconnues » et « Système de deux équations à deux inconnues » auxquels nous nous intéressons plus particulièrement dans cette thèse.

***Du point de vue des organisations mathématiques plusieurs points peuvent se dégager des analyses :***

- Pendant la période classique et bien que nous ne disposions pas de matériel didactique suffisant pour une analyse fine, nous pouvons souligner que l'approche d'enseignement de l'algèbre est essentiellement équationnelle avec une articulation entre les deux domaines arithmétique et algèbre, qui occasionne la possibilité d'un retour au concret pour accéder aux objets algébriques.

- Pendant la période de la réforme des mathématiques modernes, l'analyse du programme et du manuel correspondant fait apparaître certaines caractéristiques du rapport institutionnel à l'algèbre dominant pour le niveau scolaire correspondant actuellement à la première année du secondaire actuel. Un contexte « structurel » en lien avec des notions ensemblistes et au concept de fonction apparaît dans l'environnement des équations. Celles-ci sont introduites selon leur dimension « objet » et situées dans un contexte structurel (notions de couple, ensemble de solutions et extensions progressives du domaine de résolution). Les résolutions demandées mettent essentiellement en jeu des techniques algébriques et on note une absence d'articulation entre les registres sémiotiques. Ces techniques de nature algébrique sont toutefois limitées à des calculs formels relativement pauvres et le cadre fonctionnel (notions d'application et de fonction) est uniquement convoqué pour assurer la légitimité théorique des objets et techniques algébriques. Les techniques graphiques sont étudiées en aval des techniques algébriques avec une fonction surtout illustrative, et ne font pas l'objet d'un enseignement à part entière.

- Avec la période de la « contre-réforme », nous constatons que de multiples références à la géométrie analytique supplantent les imposants discours théoriques ensemblistes tenus pendant la période des mathématiques modernes. Les équations à deux inconnues et les systèmes de deux équations à deux inconnues restent toutefois abordés avec une forte présence du symbolisme lié aux ensembles (couples, ensemble de solutions).

L'analyse des organisations mathématiques autour de la résolution montre que les techniques algébriques sont soutenues par un discours technologique qui fait référence à la fois au cadre de la géométrie analytique, en particulier au registre des équations cartésiennes de droites et au registre des écritures fonctionnelles. De ce fait, les deux secteurs d'étude s'intercalent au travers de leurs différents thèmes d'étude : équations à une inconnue / fonctions linéaires et affines / équations cartésiennes de droites/ équations et systèmes d'équations à deux inconnues.
Quant aux praxéologies développées autour de la mise en équation, nous relevons lors de cette période, la présence de problèmes concrets et géométriques avec une place relative accordée à un enseignement explicite de la mise en équation. Toutefois, les problèmes posés semblent essentiellement surgir à titre d'application des outils algébriques, selon une approche de l'enseignement qui peut être qualifiée de « «traditionnelle » dans la mesure où ces problèmes interviennent essentiellement en fin du processus d'enseignement : après la leçon, viennent les exercices pour s'entraîner, puis les problèmes pour appliquer.

- L'analyse des programmes et des ouvrages officiels qui renvoient à la période de la réforme contemporaine fait apparaître des rapports institutionnels qui s'organisent principalement autour de la dimension « outil » de l'algèbre. Cependant, dans le manuel de 1998, nous avons montré une nouvelle organisation de l'étude qui favorise le « retour au concret » et qui remet en question l'abstraction et le formalisme des périodes d'enseignement passées. Cependant cette approche de l'enseignement de l'algèbre qui met l'accent sur la résolution de problèmes souvent guidée par la donnée préalable des grandeurs étudiées. De ce fait, c'est le point de vue « inconnu » qui semble dominant au niveau des rapports institutionnels aux objets algébriques.

Par ailleurs, cette étude a également pointé l'intérêt accordé, à partir de cette période, à la dialectique entre différents registres sémiotiques : registre du langage naturel, registre des écritures algébriques, registre numérique, registre fonctionnel et registre graphique. Cette dialectique est souvent explicite et guidée à travers les types de tâches suggérées. Remarquons aussi que si le nombre de tâches autour de la résolution algébrique des systèmes parait très réduit, peu diversifié et, ne mettent pas toujours en valeur les techniques de manipulation formelles, un intérêt est accordé à la justification technologique autour de la résolution qui s'appuie sur la notion d'équivalence

Ces constats se rapprochent d'ailleurs des analyses conduites par Coulange (2002) sur l'enseignement des systèmes d'équations à l'époque contemporaine en France, en classe de troisième :

« ...On voit apparaître des énoncés concrets de type arithmétique au sein d'activités préparatoires. Ces problèmes traditionnels sont à données numériques et à coefficients numériques. Ils ne mettent pas en jeu que des connaissances supposées « naturalisées » chez l'élève de troisième. D'un côté, suivant l'idéologie de l'utilitarisme des mathématiques contemporaines enseignées, ces énoncés nourrissent un rapport au concret. Mais surtout, les auteurs d'ouvrages contemporains cherchent à introduire officiellement le système d'équations contre d'autres résolutions numériques : « par essai-erreurs » ou « tâtonnements ». Ces problèmes qui ont été longtemps le lei de concurrence entre algèbre et arithmétique élémentaire peuvent servir l'émergence de techniques algébriques de résolution à l'aide d'un système d'équations contre d'autres techniques « numériques » ou « arithmético-numériques ». (Coulange2001.P.118).

Quant à la technique graphique, elle semble occuper une place relativement importante dans les activités, et elle est accompagnée d'un discours technologique explicite en rapport avec les fonctions affines. Nous terminons ce commentaire en disant, que les organisations mathématiques développées à cette époque mettent l'accent sur la résolution selon un point de vue, qui reste essentiellement « équationnel », et non fonctionnel.

- Avec l'avènement de la période de la « réforme moderne », on revient à une algèbre enseignée, qui se rapproche nettement d'une algèbre élémentaire selon une approche plus fonctionnelle même si l'accent est mis sur la modélisation. Nous avons relevé au sein des organisations mathématiques développées ***une prolifération d'activités*** qui mettent en avant la mise en équation, en même temps que l'étude des objets algébriques, ici les équations à deux inconnues et les systèmes d'équations. Ces activités suggèrent effectivement une évolution de l'organisation mathématique enseignée autour de la résolution d'une équation à deux inconnues. Nous avons également constaté des dialectiques entre registres qui, contrairement à la période contemporaine, restent implicites. Ceci paraît lié à une particularité plus générale de l'époque signalée plus haut : la restriction du discours enseignant, qui se réduit à une présentation des objets algébriques nouveaux mis en jeu au fil des activités. Mais aucun discours technologique ne semble tenu : ni sur les objets algébriques eux-mêmes (qui apparaissent presque 'naturalisés' au fil des exemples, des exercices rencontrés pour une part), ni sur les dialectiques entre différents registres : numérique, algébrique et fonctionnel, pourtant nettement suggérées par les activités mises en avant dans ce manuel officiel .Cette flexibilité entre les registres qui élargit le contexte d'application des objets algébriques dépassant le passage de l'arithmétique à l'algèbre, paraît être une partie du pari de la réforme de l'enseignement tunisien, qui reste toutefois en partie implicite et laisse dès lors à la charge des enseignants une part d'autonomie importante dans le passage d'un registre ou d'un cadre de travail mathématique à l'autre.

Nous synthétisons les principaux résultats de nos analyses des chapitres consacrées à l'étude des équations à deux inconnues et systèmes d'équations dans les tableaux suivants :

| Réformes | « mathématiques modernes » | « Contre réforme » | « contemporaine » | « moderne » |
|---|---|---|---|---|
| **Enjeux de l'enseignement de l'algèbre** | La théorie des ensembles et les structures algébriques : pilier du savoir à enseigner. | Une approche par la géométrie et par « le formalisme algébrique ». | Une approche par la modélisation. Cloisonnement des thèmes d'étude. Dialectique explicite entre registres de représentations sémiotiques (arithmétique/ algébrique/ fonctionnel/ langage naturel. | Approche plus approfondie par la modélisation Imbrication des thèmes, sujets d'étude au sein du domaine. Dialectique implicite entre registres. |
| **Approche d'enseignement des équations du premier degré à deux inconnues** | Introduites selon la dimension « objet » dans un contexte ensembliste. Discours technologique s'appuyant sur les fonctions/applications. Les notions de couple et de produit cartésien d'ensembles IR × IR leviers pour introduire l'objet d'enseignement | Emerge à travers une résolution qui prend pied dans l'ensemble des nombres réels. | Introduction selon la dimension « outil » Dans une dialectique explicite arithmétique/ algèbre. | Entrée par une dialectique implicite entre registres arithmétiques et algébriques. "naturalisation" des objets algébriques. |
| **Résolution algébrique** | Techniques explicites Présentation des trois cas d'ensembles de solutions. Accent mi sur l'infinité de solutions dans un contexte ensembliste. | Techniques explicites discours technologique autour de la notion d'équivalence Présentation de l'ensemble des solutions sous une forme ensembliste | Technique algébrique explicite. Appauvrissement des justifications technologiques. | Absence d'une technique algébrique explicite. |
| **Résolution graphique** | Forme cartésienne $a x + by + c = 0$. Absence d'un enseignement spécifique du travail graphique. | Technique relativement implicite, l'accent sur l'équation cartésienne de droite (de la forme $a x + by + c = 0$) étude des trois cas particuliers d'ensemble de solutions | Technique soutenue par un discours technologique en rapport avec les fonctions affines. Etude des cas particuliers $y = c$ et $x = c$. Forme réduite $y = a x + b$. | Technique implicite. |
| **Place de la modélisation** | Aucune dialectique arithmétique algèbre. Technique faible. Absence d'enjeux didactiques liés à la mise en équations. | La mise en équation placée en « arrière plan » de l'étude. Découpage de la technique en sous tâches « choix des inconnues », « mise en équations », « résolutions de l'équations » et « vérification ». | Technique objet d'un enseignement explicite : découpage de la technique en sous tâches. Problèmes concrets traditionnels en arithmétiques (argent, nombres…). | Problématisation implicite de la mise en équation. Etude simultanée de la résolution et de la mise en équation.. |

**Tableau1 : Les équations à deux inconnues au sein du domaine algébrique**

| Réformes | « mathématiques modernes » | « Contre réforme » | « contemporaine » | « moderne » |
|---|---|---|---|---|
| **Approche d'enseignement des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues** | Introduites en continuité d'une étude des équations du premier degré à deux inconnues. Les notions ensemblistes d'intersections d'ensembles. | recherche de l'intersection des ensembles de solutions de deux équations données. | Introduction selon la dimension « outil » dans une dialectique explicite entre arithmétique/ algèbre. | Etude simultanée de la résolution et de la mise en équations. Entrée par une dialectique implicite entre registres arithmétiques et algébriques. |
| **Résolution algébrique** | Des techniques algébriques qui prennent appui sur le registre numérique. Substitution, élimination. Une étude des trois cas d'ensembles de solutions. | Trois techniques de résolutions algébriques par substitution, par combinaison et par comparaison. Discours technologique exploité autour de l'équivalence. | Trois techniques algébriques fortes : substitution, élimination et égalisation. Discours technologique basé sur l'équivalence. | Deux Techniques faibles par substitution et par élimination. Description des techniques sans discours technologique explicite. |
| **Résolution graphique** | étude d'un système admettant une solution unique en continuité avec les équations à deux inconnues. | La géométrie analytique au service de la « résolution graphique ». | Technique graphique accompagnée d'un discours technologique explicite dont la portée s'étend à l'étude des cas particuliers de systèmes. | Des interrelations « discrètes » entre équations et fonctions.<br><br>Technique graphique implicite. |
| **Place de la modélisation** | Aucune dialectique arithmétique algèbre.<br>la mise en équation n'est pas un enjeu d'enseignement. | techniques algébriques et géométriques problèmes concrets interrelation entre « équations et fonctions » | Technique objet d'un enseignement explicite : découpage de la technique en sous tâches. Problèmes concrets traditionnels en arithmétiques (argent, nombres…) | Problématisation implicite de la mise en équations.<br><br>Etude simultanée de la résolution des systèmes et de la mise en équation<br>Problèmes intra- et extra mathématiques (transdisciplinaires) |

**Tableau 2 : Les systèmes d'équations à deux inconnues au sein du domaine algébrique**

***Du point de vue des organisations didactiques***

L'organisation de l'étude donnée à voir à travers le manuel officiel de la réforme moderne montre la volonté délibérée des auteurs à placer l'élève au centre de ses apprentissages, ainsi d'une organisation de l'étude binaire : « cours » et « exercices », le système d'enseignement est passé à une organisation tertiaire « activité », « cours » et « exercices » puis une nouvelle manière d'enseigner les mathématiques se met en place une approche centrée sur les activités, réservées à l'élève pour introduire une nouvelle notion , propriété ou technique. On assiste ainsi à un bouleversement dans l'organisation de l'étude qui va dans le sens d'une diminution importante du topos de l'enseignant par l'avènement « d'activités » diverses destinées à l'élève, sans pour autant que le rôle de l'enseignant dans le choix et la gestion des situations d'enseignement liées à ces « activités » ne soit tout à fait précisé.

## Pour conclure

L'histoire des réformes de l'enseignement des mathématiques que nous venons d'évoquer, fait apparaître deux finalités associées à cet enseignement et constamment présentes au fil du temps, une finalité culturelle et une finalité pratique. Ces deux finalités prennent toutefois une importance et des couleurs différentes en lien avec les rôles des acteurs et les perspectives d'enseignement de l'algèbre. La visée pratique des années 1980 n'a ainsi plus rien à voir avec la visée pratique des années 1990 et encore moins avec l'époque de la réforme moderne. L'analyse fait ressortir à la fois des « différences » et des « stabilités » associée à l'enseignement de l'algèbre et plus particulièrement des objets d'enseignements équations et systèmes d'équations.

Comme nous l'avons déjà évoqué, le pari de la réforme de l'enseignement tunisien à vouloir enrichir l'activité conceptuelle de l'élève mais qui reste en partie implicite laisse à la charge des enseignants une marge de liberté importante dans le passage d'un registre ou d'un cadre de travail mathématique à un autre et une grande part d'autonomie dans l'organisation de l'étude. Il nous semble que ces perturbations institutionnelles qui surviennent à différentes échelles du savoir à enseigner suscitent des « réactions » chez les enseignants principaux acteurs de la transposition didactique puisque de nouvelles règles du contrat se sont mises en place. Les mouvements curriculaires successifs soulèvent dés lors de nombreuses questions en rapport avec la perméabilité d'une réforme par rapport à une autre, les enjeux du changement seront-ils perçus par les enseignants ? Et comment se traduisent les implications de ces bouleversements institutionnels au niveau des pratiques en classe ?

Nous rejoignons Assude pour faire l'hypothèse qu'au niveau des pratiques enseignantes certaines formes d'adaptation à la nouvelle réforme émanent de la recherche d'un équilibre entre les pratiques anciennes et nouvelles.

« L'une de nos hypothèses est que cette logique est déterminée, en partie par la possibilité qu'il y ait une 'juste distance' entre les objets anciens et les objets nouveaux, entre les pratiques anciennes et les pratiques nouvelles, et cette 'juste distance 's'obtient par l'entrelacement de l'ancien et du nouveau….l'ancien nourrit le nouveau qui, lui, éclaire l'ancien, mais aussi l'ancien peut co-exister avec le nouveau dans un nouveau tissage de relations » (Assude 2002,p.272).

# Partie C

## Analyse des pratiques enseignantes

# Chapitre C1. Analyse des pratiques enseignantes : points de vue théoriques et choix méthodologiques

## Introduction

Dans cette partie nous abordons l'analyse des pratiques enseignantes du point de vue de la dimension professionnelle, au regard de la dimension institutionnelle. La théorie Anthropologique nous permet d'étudier cette dimension selon les différentes organisations praxéologiques mathématiques (les types de tâches, les techniques permettant d'accomplir ces types de tâches et les technologies/théories qui légitiment et justifient ces techniques) apprêtées par des professeurs autour des thèmes d'étude considérés, en interrogeant leur proximité avec les organisations mathématiques de référence. Nous apportons notamment un éclairage aux questions suivantes :

**En quoi l'introduction d'une nouvelle réforme contribue à transformer les pratiques enseignantes ?**
**Au-delà des prescriptions institutionnelles, comment les enseignants se saisissent-ils des organisations de référence du savoir à enseigner pour opérer des changements dans leurs pratiques ?**
**Jusqu'à quel point les changements ou les évolutions repérées au niveau des pratiques se rapprochent-ils des adaptations attendues ?**

Ces éléments de réflexion permettent de rendre visibles les différentes cohérences repérées au niveau des pratiques, particulièrement celles des enseignantes observées. Tout comme dans plusieurs recherches qui se centrent sur l'étude des pratiques enseignantes, nous émettons l'hypothèse, que celles-ci possèdent une cohérence interne dont on recherche des traces en croisant différentes analyses.

« Selon une tradition constructiviste, les acteurs élaborent une façon propre de connaître en restaurant de la cohérence entre les mondes de leurs expériences. Ces mondes sont énigmatiques et les acteurs leurs confèrent une signification en déployant une activité adaptative individuelle. Cette activité génère une alternance de phases d'équilibre et de déséquilibre définissant chez les acteurs engagés dans un dispositif de formation, des trajectoires singulières. » (M.Durand, 2008, p 36).

Comme nous l'avons déjà souligné, l'activité de l'enseignant assujetti aux différentes institutions s'effectue dans le cadre d'un système complexe de contraintes, mais conserve un espace de liberté au sein de ce système. Le professeur fait des choix d'enseignement, et investit de façon propre les marges de manœuvre dont il dispose.

Nous parlons de système complexe de contraintes, car le professeur est soumis à des contraintes externes (injonctions institutionnelles, dispositifs didactiques généraux ...) et des contraints plus spécifiques à la dimension épistémologique des objets de savoir mathématiques à enseigner (Coulange, 2000). Cet ensemble de contraintes externes résulte des « différents assujettissements qui caractérisent l'enseignant » (Brousseau 1995, p. 6). Il s'agit pour nous de dégager à partir des analyses conduites dans le chapitre B, des caractéristiques des pratiques, qui peuvent être l'écho de perturbations exogènes du système institutionnel.

« Pour approcher les pratiques, nous proposons de prendre en compte à la fois leurs buts (les apprentissages des élèves) mais aussi leur enrôlement au quotidien et les contraintes incontournables, non conjoncturelles qu'impose le métier d'enseignant de mathématiques. Ces contraintes se déclinent en prenant en compte d'une part, des déterminants extérieurs à la classe (institutionnels, sociaux et personnels) et d'autre part, différentes échelles rendant compte du travail réel. » (Robert 2007, p .18).

Ainsi, dans l'action l'enseignant peut réagir de plusieurs façons en vue de s'adapter aux changements, en mettant en œuvre des routines par souci d'efficacité. Les explications qu'il peut déclarer ou les opinions qu'il défend ne reflètent que partiellement les nécessités de l'action telles qu'il les vit en situation de classe ; celles-ci traduisent généralement les influences culturelles qui l'ont marqué.

« La culture d'un acteur est constituée des propositions utiles pour des actions qui satisfont à des normes et valeurs d'une communauté, et des contraintes d'efficacité liées à la tâche accomplie. Elle est composée des expériences passées, condensées et provoquées dans l'action ici et maintenant. Elle est donc à la fois de nature mémorielle et expérientielle. » (Durand 2008, p .37).

Ces nombreux points évoqués doivent nous permettre de disposer de jalons pour analyser les pratiques enseignantes et leurs évolutions dans le contexte précis d'un changement de réforme en identifiant des routines ou des régulations mises à l'œuvre.
Le cadre d'analyse des pratiques enseignantes développée par Robert (2001) éclaire certains aspects des pratiques que la théorie anthropologique ne permet pas d'approcher.

Ainsi, nous organisons cette partie en trois chapitres principaux, séparant artificiellement mais pour une meilleure opérationnalité de l'instrument d'analyse, l'étude des pratiques à des échelles d'analyse macro et micro. Nous commençons par présenter dans un premier temps les éléments théoriques sous-jacents à l'étude et qui s'inspirent essentiellement de la théorie anthropologique du didactique. Nous faisons aussi référence à d'autres cadres d'analyses des pratiques qui mettent en évidence certaines limites des outils d'analyse fournis par la TAD dans le cas précis de notre recherche.

# I. Eléments d'analyse des pratiques enseignantes dans le cadre de la TAD

Comme nous l'avons déjà développé dans le premier chapitre de cette thèse, le fonctionnement des systèmes didactique est conditionné par celui des instituions de la société dans laquelle ces systèmes prennent place. Dans ce cadre, l'enseignant est modélisé comme un sujet d'une institution ou de plusieurs institutions. Les pratiques de l'enseignant doivent ainsi faire en sorte de s'aligner avec les attentes de l'institution. Si celles-ci contraint les pratiques de l'enseignant, il dispose toutefois de marges de liberté, en faisant jouer « un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres » (Chevallard 1992, p .91).

Ainsi la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) définit un cadre d'analyse des pratiques enseignantes à travers l'étude des praxéologies mathématiques et didactiques mises en place par les professeurs.

L'analyse en termes de praxéologies, nous permet dans le cadre de notre problématique de caractériser l'écart entre les organisations mathématiques et didactiques mises en place par les professeurs avec les praxéologies de référence (analysées dans le chapitre B) et de s'interroger sur les éventuels ajustements apportés au niveau du travail algébrique mis en œuvre.

## I.1 Analyse des organisations praxéologiques

Ainsi nous serons amenés à analyser d'une part, les organisations mathématiques mises en place par les professeurs, selon un système de types de tâches T à accomplir, des techniques $\tau$ permettant de résoudre ces tâches, de technologies $\theta$ justifiant ces techniques et de théories $\Theta$ justifiant ces technologies. (Notons que pour ce niveau d'enseignement, la théorie se confond pratiquement avec la technologie associée à la technique).

Nous avons fait le choix de séparer l'étude des praxéologies liées à la mise en équations de celles liées à la résolution des équations et des systèmes d'équations pour la raison suivante :

Ces organisations mathématiques sont développées dans les réformes anciennes de manières séparées : Dans les manuels officiels de ces époques, les équations et les systèmes d'équations sont généralement abordés sous leur aspect objet, la mise en équation apparaît comme un type de tâche isolé ou à titre d'habillage pour introduire certaines notions. Dans la réforme contemporaine l'accent est explicitement mis sur la dimension outil de l'algèbre, les objets d'enseignement équations et systèmes d'équations sont introduits pour résoudre des problèmes souvent concrets. Dans la réforme moderne, cet aspect est plus renforcé : les organisations développées dans le manuel officiel laissent entrevoir une étude simultanée de ces organisations mathématiques. Ainsi nous avons fait l'hypothèse que ce changement au niveau des praxéologies de référence a un impact sur les pratiques des enseignants et que leurs activités en classe présenteront sans doute des caractéristiques selon le type de tâche en question.

Dans l'analyse des organisations mathématiques construites par les professeurs nous serons amenés à mettre en évidence certaines spécificités des organisations didactiques conduites pour permettre l'étude de ces organisations mathématiques. Bien que l'étude de ces organisations praxéologique peut être menée indépendamment l'une de l'autre, la codétermination entre le mathématique et le didactique (Chevallard, 2001), permet de rendre compte au niveau de la pratique les organisations mathématiques qui dépendent fortement des organisations didactiques mises en place et inversement les organisations didactiques qui peuvent contraindre développer des organisations mathématiques à enseigner.

## I.2 Caractérisation des techniques dans le travail mathématique

Dans l'analyse des pratiques des enseignants en termes d'organisations mathématiques, nous sommes confrontées au problème de l'apparition d'une technique, du travail de la technique et du discours technologique éventuellement associé. En identifiant un certain nombre de techniques possibles qui accompagnent la mise en place des organisations mathématiques par les enseignantes observées (soit à partir des cahiers soit au sein de la classe) nous faisons référence à des enjeux liés à leur émergence et à leur explicitation en rapport avec les organisations ponctuelles identifiées. C'est pour quoi nous avons choisi de s'appuyer sur les outils d'analyses mis en avant par Assude et Mercier (2007) pour préciser les enjeux relatifs à la mise en œuvre des techniques mathématiques .Ces auteurs définissent trois types de techniques en rapport avec le travail mathématique qu'ils définissent de la manière suivante :

-Les techniques ***invisibles*** (ou muettes) dans une institution sont celles qui permettent de produire un résultat mais qui ne sont pas explicitées, car leur usage n'implique ni commentaire ni contrôle langagier .Pour celui qui les met en œuvre, elles sont muettes, la pratique démontrée est le procédé de leur transmission.

-Les techniques ***faibles*** sont celles qui permettent de produire un résultat mais qui sont explicitées : la manière de faire peut être montrée et commentée par un expert ou observée par un apprenti comme un savoir en situation.

-Les techniques ***fortes*** sont celles qui produisent un résultat attendu, qui sont non seulement explicitées mais aussi justifiée par une technologie ou théorie explicites au sens de Chevallard (1992, 1999).

Ces auteurs mettent en lien les niveaux du travail didactique et les types de techniques mises en place .Dans le cas des techniques invisibles, l'élève produit une réponse et il est dans un rapport d'action, dans le cas des techniques faibles, l'élève est non seulement dans un rapport d'action mais aussi dans un rapport de formulation dans le sens ou il décrit ou formule un discours de la technique. Dans le cas des techniques fortes, l'élève est dans un rapport d'action, de formulation et éventuellement dans un rapport de validation.

« La caractérisation des techniques en techniques invisibles, faibles, fortes (Assude et Mercier), et le lien conceptuel qui est établi entre les différentes logiques didactiques (action, formulation, validation) parait de nature à faire avancer la nécessaire théorisation du concept de technique en didactique. » (Sensevy 2007, p. 205).

Cette caractérisation des techniques permettra de comparer les pratiques effectives mises à l'œuvre par les enseignantes retenues pour l'expérimentation avec ce qui est attendu du point de vue institutionnel et *des organisations mathématiques de référence.*

## I.3 La dialectique ancien / nouveau dans le processus d'enseignement apprentissage

La dynamique des organisations mathématiques et didactiques peut être également questionnée par la dialectique ancien / nouveau (Chevallard 1991, Assude 2004) perçue au niveau de la pratique du professeur dans sa structuration de son enseignement en fonction des changements, par exemple la prise en compte de l'imbrication de différents thèmes et secteurs d'étude au sein du domaine, l'articulation entre les raisonnements ou techniques arithmétiques et algébriques, la prise en compte de la conversion entre registres de représentation sémiotiques au sein du cadre algébrique .

La nature du travail algébrique lié aux équations du premier degré joue un rôle à la fois central et subtil au niveau du collège : associé au travail numérique et littéral, il met en évidence l'importance accordée au sens des expressions algébrique et du traitement formel. L'enseignement de base qui vise un apprentissage pré-algébrique est prolongé au niveau du secondaire avec l'étude des fonctions linéaires et affines et celle des équations à deux inconnues et systèmes linéaires. Or cette continuité dans les apprentissages n'est pas si simple, nous avons eu l'occasion d'observer dans nos analyses (chapitre B) un cloisonnement dans certains apprentissages au sein du domaine algébrique pendant la réforme contemporaine. Il n'est donc pas si simple pour l'enseignant de mener à la fois un travail sur des objets « anciens », déjà rencontrés par les élèves, sur des objets « récemment rencontrés » (par exemple les fonctions linéaires et affines) et sur l'introduction d'objets « nouveaux » et d'assurer une dialectique du processus enseignement- apprentissage sous-jacentes aux organisations mathématiques de référence .

« Les changements induits dans les programmes et dans certaines pratiques des acteurs montrent qu'une stratégie d'ajustement entre le savoir scolaire et le savoir savant, entre les pratiques scolaires et les pratiques sociales se met en œuvre pour trouver une « juste distance » entre l'ancien et le nouveau. » (Assude 2004, p .325).

C'est ce qui nous a conduit à privilégier cette question, en nous interrogeant sur la gestion enseignante de la dynamique ancien / nouveau au niveau de la pratique : En particulier est ce que les organisations mathématiques développées permettent de faire évoluer le rapport des élèves aux objets d'enseignement « équation à deux inconnues » et « système de deux équations à deux inconnues » et de construire un rapport idoine aux objets algébrique ?

## I.4 La notion de « topos » et la caractérisation de la topogénése

Afin de caractériser les organisations didactiques qui accompagnent la mise en place des organisations mathématiques de référence, nous nous sommes intéressés à la *topogénése,* c'est-à-dire aux responsabilités respectives du professeur et des élèves vis-à-vis du savoir mathématique enseigné .Cette notion nous paraît essentielle pour caractériser le fonctionnement didactique des enseignantes au regard des changements actuels qui suggèrent un important déplacement topogénétique d'ensemble pour donner davantage de place à l'activité mathématique des élèves en situation de classe et ce, dès les premiers moments de l'étude (de première rencontre ou exploratoire).

« La description des « mouvements topogénétique » permet de séparer à tout moment qui apprend de qui désigne ce qui doit être appris : les sujets peuvent, pour que la situation aboutisse, passer dans le topos de l'autre. Les conditions de ce phénomène devront être étudiées » (Sensevy, Mercier 2007, p .195).

En d'autres termes, il s'agit pour nous d'examiner dans l'analyse d'une organisation didactique la production des différentes positions institutionnelles du professeur et des élèves et le partage de leurs responsabilités. Comme le souligne Chevallard, l'une des tâches problématiques pour le professeur est de créer un topos pour l'élève :

« L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour « donner une place aux élèves », c'est-à-dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un *topos* approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer. » (Chevallard 1998, p.108).

Un point essentiel à cet égard consiste donc à examiner, en toute organisation didactique scolaire, la *qualité* et la *quantité* du travail autonome exigé des élèves et qui est *invisible* (officiellement) du professeur. Il arrive que ce travail invisible, accompli par l'élève sur une *autre scène*, que l'enseignant peut en principe ignorer, tende à occuper l'essentiel de l'espace de l'étude.

## I.5 Les moments de l'étude et les limites de la TAD

Comme nous l'avons déjà évoquée dans la première partie de la thèse (Chapitre A), l'analyse des organisations didactique mises en place par le professeur peut être questionnée par la manière dont elle réalise les différents moments de l'étude .Nous avons aussi mis en avant dans l'analyse du manuel officiel actuellement en vigueur une nouvelle restructuration des moments de l'étude : les organisations didactiques développées montrent à voir des moments de l'étude imbriqués , absents ou confondus. L'identification des phases de dévolution et d'institutionnalisation dans la pratique des

enseignants et de l'ordre chronologique dans lequel ils vont se succéder peut nous renseigner sur des ajustements au niveau des organisations didactiques.
Cependant si la description en termes de moments de l'étude permet de répondre à certaines questions, elle nous parait insuffisante pour décrire les organisations didactiques qui accompagnent les organisations mathématiques même si dans ce cas il s'agit d'organisations mathématiques locales (thèmes d'étude). **La question que nous nous posons dans une problématique de l'analyse des adaptations à une réforme renvoie à la manière de décrire plus finement les praxéologies didactiques mises à l'œuvre. Comment le professeur s'approprie une organisation mathématique et l'adapte à son enseignement ? Comment décrire la dynamique des organisations mathématique et didactique au niveau des pratiques effectives des enseignants ?**

Ce qui nous semble d'ailleurs, intéressant dans cette réflexion théorique autour de la dimension professionnelle des pratiques, c'est l'interrogation qu'elle porte, sans vouloir y apporter une réponse décisive, sur les outils de description ou d'articulation de cadres théoriques. Dans le contexte de cette recherche, nous avons choisi d'exploiter plus ou moins directement, des outils d'analyse des pratiques enseignantes empruntés à d'autres cadres théoriques afin de nous éclairer sur ces questions.

## II. Identification de routines pour une analyse des pratiques enseignantes

L'étude de ces routines se retrouve au carrefour de différentes approches théoriques en didactique des mathématiques centrées sur les pratiques enseignantes : la Théorie Anthropologique mais aussi la Double Approche développée par Robert et Rogalski (2002) ainsi que la Théorie de l'action du professeur (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni 2000). Sans emprunter directement aux deux dernières approches précitées (c'est-à-dire sans en utiliser les outils systématiques de description de la réalité), nous nous en inspirons pour caractériser des routines de pratiques professorales en situation de classe. Un de nos principaux indicateurs pour identifier des techniques ou des routines enseignantes renvoie aux *mouvements topogénétique*, mis en avant par Mercier et Schubauer-Léoni (2002).[18]

« Pour comprendre l'action du professeur, il est important d'analyser les rôles par lesquels les élèves et le maître assument la responsabilité relative à leur position dans l'interaction : topogénèse. » (Assude, Mercier, Sensevy 2007, p. 246).

Par ailleurs, Nous essayons d'identifier *des techniques didactiques* dans les pratiques enseignantes. Cette recherche des techniques du professeur s'apparente à l'identification de *routines* ou d'éléments stabilisés dans les pratiques enseignantes. Nous repérons des successions répétitives ou « phases » de gestes ou de discours enseignant, sans en préciser a priori une fonctionnalité plus précise que de faire avancer le projet d'enseignement. Ceci nous rapproche davantage de la Double Approche (Butlen, Masselot, Robert et Vandebrouck 2002) qui suggère de pister ce type de récurrences pour cerner les composantes médiative[19] et cognitive des pratiques enseignantes, et des logiques d'action qui caractérisent un enseignant donné.

Comme le montre Butlen (2006), les gestes professionnels (mobilisés) sont en partie implicites et automatisés et se construisent avec l'expérience professionnelle , leur maîtrise permet à un enseignant de mettre en actes en temps réel son projet, notamment d'interagir avec ses « vrais » élèves, d'adapter plus ou moins consciemment ses préparations en fonction de la conjoncture, de prendre des décisions...Ils permettent ainsi aux professeurs de gérer une classe de situations, d'adapter leurs réponses à des changements de surface. Ce point de vue nous permet de décrire des régularités intrapersonnelles mais aussi interpersonnelles dans la mesure où chaque professeur se les approprie et les mobilise dans l'action en fonction de son histoire personnelle, de son expérience professionnelle et de ses propres représentations. Ils peuvent notamment être identifiés dans la réalisation par le professeur des processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation.

---

[18] « Les techniques identifiées à ce jour [considérées plus loin comme des routines pour le professeur au sein de sa pratique d'enseignement] dans nos travaux portent [en partie] sur les mouvements topogénétique permettant ainsi la gestion des territoires et des temporalités. » (Mercier et Schubauer-Leoni 2002, p.2).

[19] Les composantes médiatives et cognitives permettent la description du scénario mathématique comprenant les descriptions des contenus abordés avec la gestion globale prévue et des déroulements comprenant les formes de travail effectives et tous les accompagnements, avec la nature des discours, la gestion du tableau, les aides, les échanges...

Ces gestes ne sont pas indépendants les uns des autres, ils s'organisent et s'articulent entre eux. Ils déterminent alors des stratégies conformes à la logique du genre : des pratiques différentes correspondent à des gestes et des routines différents.
L'identification de ces routines est cruciale car elle peut nous renseigner sur la stabilité et l'imperméabilité des pratiques enseignantes aux changements prescrits à travers une réforme.
Les possibilités d'évolution des pratiques des professeurs peuvent être également interrogées en termes de *régulations* des praxéologies mathématiques et didactiques développées autour du savoir à enseigner. A cet effet, nous empruntons de façon métaphorique, le point de vue de la Théorie des Situations Didactiques en nous interrogeant sur ce qui peut constituer un milieu de nature antagoniste pour les pratiques enseignantes et être à l'origine de régulations dans ces pratiques. Notamment, s'agit-il d'éléments observés, « vécus » par le professeur en situations de classe ou relatifs à ces situations d'enseignement ? Si oui, lesquels ?
Ces éléments de notre cadrage théorique étant posés, nous exposons ci-après une étude de cas : qui concerne d'abord une enseignante que nous appelons P1 dans la suite, observée deux années consécutives (la première année correspondant à l'entrée en vigueur de la réforme évoquée), à l'occasion de ses enseignements autour des équations et des systèmes d'équations. Puis nous observons une enseignante P2 dont les organisations mathématiques apprêtées (par l'observation des cahiers) sont quasiment conformes aux praxéologies mathématiques de la réforme contemporaine.

Notre questionnement découle de l'adaptation d'une pratique enseignante à une réforme, en d'autres termes : Qu'est ce qui peut changer ? Qu'est ce qui résiste au changement ?

# III. Méthodologie d'analyse

## III. 1 Les enseignants concernés

Compte tenu de notre problématique, nous avons mené notre expérimentation auprès d'enseignants chevronnés ayant une quinzaine voire une vingtaine d'année dans l'enseignement. Ces enseignants sont passés par des réformes successives de l'enseignement exerçant dans des régions différentes de la Tunisie. Nous avons rencontré certains d'entre eux lors de séminaires organisés par des associations tunisiennes qui s'intéressent au développement de l'enseignement des mathématiques. Certains professeurs ont accepté de nous remettre par la suite des photocopies de cahiers d'élèves. D'autres ont accepté après beaucoup d'hésitation de nous accueillir dans leurs classes. Nous avons passé avec eux un contrat en leur expliquant qu'il s'agit d'un travail de recherche sur le terrain portant sur les pratiques scolaires en algèbre et que nous n'avons nullement l'intention d'intervenir ou de juger leur pratique de classe et que finalement leur contribution à ces expériences ne fera qu'enrichir les travaux dans ce domaine et négocier des questions qui leurs semblent pertinentes à ce sujet.

L'enseignante P1 a vingt ans d'expérience dans l'enseignement secondaire dans un lycée secondaire à Bizerte. P2 est une enseignante qui exerce depuis vingt deux ans dans un autre lycée de la région. P3 est une stagiaire qui vient de réussir au concours du CAPES en 2003 et qui enseigne dans un lycée de la même ville. Nous avons fait en sorte avec l'aide de ces enseignantes d'avoir des classes homogènes. Nous avons assisté à la quasi-totalité des séances consacrées aux thèmes « équations à deux inconnues » et « systèmes linéaires ». Les enseignantes P1 et P3 utilisent le même support didactique c'est-à-dire le manuel officiel actuel et abordent pratiquement le même contenu, P2 organise l'étude de ces deux thèmes en se référant au manuel de la période contemporaine.
Nous justifions dans le paragraphe qui suit le choix d'observer ces enseignantes et la méthodologie adoptée.

## III.2 Pourquoi et Comment étudier les pratiques de l'enseignante P1 ?

Comme nous l'avons développé dans la première partie de ce chapitre, la Théorie Anthropologique nous permet d'étudier la dimension professionnelle des pratiques au regard de la dimension institutionnelle. Nous menons une analyse détaillée des différentes organisations praxéologiques mathématiques (les types de tâches, les techniques permettant d'accomplir ces types de tâches et les technologies/théories qui légitiment et justifient ces techniques) apprêtées par des professeurs autour des thèmes d'étude considérés, en interrogeant leur proximité aux organisations mathématiques de référence.

Pour ce faire, notre point de départ a été une étude de type macroscopique visant à dégager les caractéristiques les plus marquantes des savoirs de professeurs à travers une analyse des cahiers d'élèves. Nous avons recueilli un échantillon varié de dix cahiers provenant de classes de professeurs chevronnés. Précisons que dans le contexte tunisien, les cahiers d'élèves semblent livrer bien davantage que « ce qu'il y a à savoir ». Tous les cahiers recueillis comportent notamment à la fois une partie « cours » mais aussi toutes les activités et tous les exercices effectués par les élèves et qui ont donné lieu à une correction de la part des enseignants. Nous considérons donc l'analyse de ces cahiers comme un premier révélateur des pratiques enseignantes en termes de résistance ou de changement.

Cette analyse des cahiers permet de dégager les principales caractéristiques du rapport institutionnel à l'algèbre à travers une étude des deux thèmes considérés aux équations et à la mise en équations. Elle permet également le repérage d'anomalies ou de dysfonctionnements même petits par rapport à la tendance globale et l'existence d'un espace de liberté certain pour les professeurs, plus ou moins exploité.

En effet, aux frontières des programmes, on y identifie des leviers divers choisis par les professeurs qui apparaissent comme autant d'entrées possibles pour introduire ces notions. Ils peuvent correspondre aussi bien à l'ouverture à des types de tâches plus diversifiés, qu'au travail de techniques de manipulation formelle des équations ou des systèmes d'équations, ou encore à un travail visant une flexibilité plus grande dans l'articulation entre registres, comme le souligne Assude (2004) :

« L'institution scolaire, par les réformes successives, indique un certain nombre de changements, surtout ceux qui sont identifiées et voulus, mais les changements « invisibles » dans un premier temps ne sont pas forcément visibles et repérés par l'institution ou par les acteurs. »(Assude 2004, p.324).

L'étude du contenu de ces cahiers qui fera l'objet du chapitre suivant révèle à la première lecture un phénomène de résistance forte aux deux dernières réformes du curriculum scolaire tunisien, puisque les contenus de 5 cahiers sur 10 renvoient de façon quasi-exclusive à des organisations mathématiques de référence typiques des périodes d'enseignement antérieures (type Contre-réforme et Réforme des mathématiques modernes).

Seul le contenu du cahier d'élève de la professeure P1 renvoie de façon presque exclusive à la réforme moderne [20] amorcée depuis 2005-2006 : avec une reprise apparente de nombreuses activités telles quelles, et un cours très proche de ce qui est suggéré par le manuel officiel.

Etant celles qui étaient visiblement les plus conformes et de loin aux attentes de l'institution, l'étude des pratiques de cette enseignante pouvait *a priori* nous renseigner plus que les autres sur les possibilités d'évolution des pratiques dans un contexte de réforme du curriculum.

Nous avons donc choisi d'observer l'ensemble des séances dans les classes de P1 au fil de son enseignement dispensé sur les équations à deux inconnues et les systèmes d'équations. Ce pendant deux années consécutives, avec l'idée d'interroger les stabilités ou les évolutions apparentes d'une année à l'autre en termes de routines et de régulations.

Le tableau suivant synthétise les données recueillies concernant les pratiques de P1 pendant ces deux années d'observation.

| **Année 1 (2005-2006)** | **Année 2 (2006-2007)** |
| --- | --- |
| - Transcriptions correspondant à 5 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P1 correspondant à 5 séances<br>(2 séances sur le thème des équations à deux inconnues ; 3 séances sur le thème des systèmes d'équations)<br>- Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs<br>- Entretien *post* séquences d'enseignement. | - Transcriptions correspondant à 5 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P1 correspondant à 4 séances dont une de deux heures.<br>(2 séances sur le thème des équations à deux inconnues 3 séances sur le thème des systèmes d'équations).<br>- Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs. |

L'enseignante P1 a bien accepté de nous accueillir dans sa classe et nous avons pour cela demandé l'autorisation auprès de la délégation régionale de l'enseignement pour pouvoir y assister. Ces formalités ont pris du temps, par crainte que les thèmes qui nous intéressent ne soient abordés, nous avons choisi de commencer à filmer trois séances de P1 mais juste après nous avons eu l'approbation d'assister dans les classes en tant qu'observatrice avec une interdiction de filmer. Nous étions contraint de continuer à mener notre expérimentation par des enregistrements audio et en prenant des notes sur l'ensemble des traces écrites au tableau ainsi que sur le déroulement des séances. Nous avons également recueilli l'ensemble des documents distribués aux élèves dont un cahier « modèle » et photocopié les sujets des contrôles proposés par les enseignantes.

[20] Pour les 5 cahiers d'élèves restant : le contenu d'un cahier fait écho à la période précédente dite contemporaine. Trois autres cahiers révèlent des organisations mathématiques enseignées qui s'inspirent de différentes organisations de références à la fois typiques de la période nouvelle et de la Contre-réforme ou de la Réforme.

Ce dispositif a été complété par des entretiens post séquences. Nous analysons ainsi les pratiques des enseignants pendant les séances en classe, à partir de transcriptions et sur la base du corpus de données recueillies.

A la lumière des résultats obtenus, il nous a semblé intéressant de continuer notre investigation sur l'appropriation par P1 du savoir à enseigner dans sa tentative d'adaptation à la nouvelle réforme. Nous avons donc choisi de retourner l'année suivante dans la classe de P1 et de mener nos observations concernant les mêmes thèmes d'étude. Nous émettons l'hypothèse que l'analyse de l'évolution des pratiques observées suite au changement de réforme permettrait de mieux saisir l'impact des changements sur ces pratiques et de comprendre la manière dont elles sont marquées par des éléments prédéterminés qui conditionnent aussi bien l'activité de l'enseignante que son évolution. Robert (2004) justifie clairement les enjeux de ces adaptations :

« L'éventuelle nécessité **d'adaptation individuelle** de certaines composantes des pratiques, pour gérer de nouveaux environnements par exemple est rendue difficile par la complexité des pratiques et l'imbrication de différents niveaux dans les choix. On peut penser par exemple que les représentations générales de l'enseignement et de l'apprentissage qui dépendent des expériences passées et proches de l'enseignant et qui conditionnent les choix globaux de l'enseignant, en assurant une certaine cohérence, ne changent pas facilement en tout cas ce qui en constitue « le noyau dur ». L'enseignant ne peut donc qu'envisager des petits aménagements de ses pratiques qui ne suffisent pas toujours à l'adaptation attendue. » (Robert 2004, p.14).

## III.3 Pourquoi et comment étudier les pratiques de l'enseignante P2 ?

La façon dont chacun des enseignants observés prend en compte et analyse les ressources d'aides et de contraintes que sont les prescriptions institutionnelles, caractérise les pratiques de chacun. P2 semble à première vue résister au changement, les praxéologies développées dans le cahier « modèle » semblent quasiment conformes à la réforme contemporaine, nos interrogations reposent alors ici sur la spécificité de l'activité de P2 dans la construction de cet *ancrage institutionnel* des savoirs. Il s'agit d'examiner dans quelle mesure son expérience antérieure détermine cet ancrage et prend en compte les changements véhiculés par la réforme « moderne ».

L'enseignante P2 a accepté de nous recevoir dans sa classe en passant avec elle le même contrat didactique que le précédent, nous n'intervenons pas du tout au cours du déroulement et nous avons fait croire à l'enseignante qu'il s'agit d'observer le travail des élèves autours des thèmes concernés pour éviter au maximum de perturber ses habitudes de travail et de perturber sa gestion du savoir à enseigner .Nous avons assisté à l'ensemble des séances consacrées à ces deux thèmes d'études puis nous avons procédé à leur transcription. L'année d'après, nous sommes retournée la voir et elle nous a confirmé qu'elle ne comptait rien modifier du cours dispensé l'année d'avant et que sa gestion est telle qu'elle. Nous nous sommes donc basée sur les observations recueillies pendant cette année d'observation.

Le tableau suivant synthétise ces données recueillies concernant les pratiques de P2 pendant cette année d'observation :

| **Année (2005-2006)** |
|---|
| Transcriptions correspondant à 6 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P2 correspondant à 5 séances dont une de 2 heures.<br>(2 séances sur le thème des équations à deux inconnues ; 3 séances sur le thème des systèmes d'équations)<br>- Cahier « modèle » d'élève, énoncés de devoirs.<br>- Entretien *post* séquences d'enseignement. |

## III.4 Pourquoi et comment étudier les pratiques de l'enseignante P3 ?

A la lumière des résultats obtenus sur les pratiques de l'enseignante P1 la seconde année d'observation nous nous sommes posées des questions en rapport avec la gestion des activités du manuel et le poids de certaines contraintes institutionnelles sur la mise en œuvre des organisations mathématiques liées à la mise en équation et la résolution.

Les déclarations de l'enseignante n'en rajoutant rien à l'éclairage de sa logique d'action, nous avons choisi de voir comment ces mêmes organisations mathématiques de référence pouvaient être effectivement apprêtées et mises en place par une novice écartant ainsi la variable « expérience » qui peut intervenir comme un déterminant de la composante personnelle des pratiques. Nous pensons tout comme Robert que :

L'étude des pratiques transitoires des débutants permet d'illustrer ce type d'analyses dans la mesure où ils sont amenés à adopter une nouvelle posture, faisant intervenir leur composante personnelle et liée à l'exercice d'un métier nouveau : cela les amène à prendre conscience des contraintes et des marges de manœuvre de leur nouvelle profession. Au niveau de la composante cognitive, le projet développé par les débutants est souvent assez local, à l'échelle de quelques séances et ne s'inscrit pas toujours dans un ensemble relativement cohérent sur l'année (Robert, 2007).

« Le fait de ne pas disposer d'automatismes, de routines, ni de relief global, tant sur les mathématiques que sur les élèves fait obstacle à une certaine prise de distance avec le niveau local[21], qui, de ce fait, occupe toute la scène. Faute de suffisamment de relais aux autres niveaux micro et global, il y aurait une « surcharge » du niveau local. On augmente ainsi la lisibilité de constats partagés par beaucoup de chercheurs en faisant intervenir les trois précédents. » (Robert 2007, p .23).

Les séances d'observation de P3 ont débuté le 4/04/2007, nous synthétisons le corpus recueilli à cet effet dans le tableau suivant les donnée recueillies :

| **Année (2006-2007)** |
|---|
| Transcriptions correspondant à 6 heures d'enregistrement audio ou d'observation dans la classe de P3 correspondant à 4 séances dont deux séances de 2 heures.<br>(2 séances sur le thème des équations à deux inconnues ; 2 séances sur le thème des systèmes d'équations)<br>- Fiche de préparation de P3.<br>- Entretien *post* séquences d'enseignement. |

[21] Masselot et Robert mettent en évidence trois niveaux d'identification des organisateurs des pratiques :

- à un niveau micro, on étudie ce qui est non réfléchi, automatique participant à la réalisation des processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation, ou encore dans le discours ce qui est n'est pas préparé, les déplacements …
- à un niveau local, celui de la classe au quotidien, on compare les préparations et les improvisations et on dégage toutes les adaptations du professeur.
- A un niveau macro, on cherche à identifier les intentions de l'enseignant, son projet, ses préparations de séances.

# Chapitre C2. Analyse des cahiers d'élèves : Un premier révélateur des pratiques enseignantes

## Introduction

Afin de percevoir l'impact du changement de réforme sur les pratiques d'enseignants expérimentés, nous avons recueilli un échantillon varié de cahiers d'élèves, provenant de classes de professeurs ayant au moins vingt ans d'ancienneté dans le métier, exerçant dans différentes régions de Tunisie. Nous avons pu disposer de dix cahiers d'élèves que nous considérons comme fidèles aux attentes de leurs professeurs (des « cahiers modèles ») puisque nous avons laissé à ces derniers le choix du cahier à nous transmettre.

Tout comme d'autres auteurs avant nous (Noirfalise 1995...) considérons ces cahiers comme révélateurs de certains aspects des pratiques enseignantes.

« L'écrit du cahier de l'élève, dans une telle perspective, comme lieu de « mémoire » d'institutionnalisation de ce qu'il y a à savoir, nous semble bien être un bon candidat à l'analyse. Cet écrit étant fait sous la responsabilité de l'enseignant, que celui-ci -invite ses élèves à prendre des notes ou qu'il écrive au tableau, nous avons bien aussi une analyse portant sur « une pratique » de l'enseignant. » (Noirfalise 1995, p.6).

Précisons que dans le contexte tunisien, les cahiers d'élèves semblent livrer bien davantage que « ce qu'il y a à savoir ». Tous les cahiers recueillis comportent notamment à la fois une partie « cours » mais aussi toutes les activités et tous les exercices proposés aux élèves et qui ont donné lieu à une correction de la part des enseignants.

Sur la base de ces cahiers, nous essayons de repérer les organisations mathématiques et didactiques apparemment développées par les professeurs concernés, autour des thèmes d'étude « équations à deux inconnues » et « systèmes d'équations ».

Nous appuyant sur l'approche anthropologique du didactique, nous émettons l'hypothèse que ces organisations praxéologiques répondent forcément pour une part à des organisations du savoir à enseigner, ou de l'étude qui sont ou ont été prescrites au sein de l'institution scolaire tunisienne. Nous considérons dès lors les organisations mathématiques et didactiques étudiées au sein de l'analyse de manuels scolaires comme des *organisations praxéologiques de référence.*

Nous commençons par tenter de repérer à laquelle ou auxquelles de ces organisation(s) praxéologique(s) mathématique(s) et didactique(s) de référence, le contenu des cahiers étudiés paraît davantage renvoyer ; tout en nous posant systématiquement la question de la conformité avec les organisations de l'étude actuellement prescrites, avec l'avènement de la période dite « moderne ».

Les questions avec lesquelles nous abordons cette étude de cahiers d'élèves seraient en résumé les suivantes :

*** Qu'est ce qui dans les organisations mathématiques apparemment mises à l'étude par les enseignants pourrait renvoyer à une organisation mathématique de référence passée ou présente, voire de plusieurs organisations mathématiques ?**

*** Que révèlent les organisations didactiques sous-jacentes ?**

Ce qui au passage soulève la question sur ce que peut ou non révéler le contenu d'un cahier sur les organisations didactiques, sans observations de classe. Etant donné, le caractère assez « complet » de l'ensemble des cahiers recueillis, nous faisons l'hypothèse qu'il est possible d'examiner la chronologie et la place accordée à certains moments de l'étude, sans pour autant en faire l'étude systématique ici.

*** Plus précisément : quels sont les aspects de conformité ou de non-conformité des organisations mathématiques et didactiques prescrites officiellement depuis peu ?**

# I. Des références presque exclusives aux organisations mathématiques et didactiques passées : Contre-réforme, voire Réforme.

Nous avons repéré quatre cahiers d'élèves dont les praxéologies de référence paraissent renvoyer explicitement pour une grande part à la « contre réforme » voire à la réforme.

Nous commençons par rendre compte de notre analyse des cahiers des élèves surnommées ***Sara*** et ***Samia***, qui présentent de nombreux points communs.

## I.1 Les cahiers de Sara et de Samia : un intermédiaire entre Réforme et Contre-réforme

Au fil des organisations mathématiques apparemment mises à l'étude dans ces deux cahiers, le rapport à l'algèbre dominant dans les organisations mathématiques étudiées s'organise essentiellement autour de la dimension « objet », avec un important discours technologico-théorique sur les objets de savoir et les techniques algébriques mises à l'œuvre.

### I.1 .1 Des objets de savoir et des techniques algébriques théorisés

Ainsi, dans le cahier de *Samia*, l'objet de savoir « équations du premier degré à deux inconnues » est d'abord défini avec une écriture paramétrée. Puis des exemples d'équations à deux inconnues sont donnés, avec le souci de présenter différents cas possibles en attribuant des valeurs éventuellement remarquables aux paramètres :

*I- Equations du premier degré à deux inconnues*

*1) <u>Définition</u> : On appelle une équation du premier degré à deux inconnues toute écriture qui se ramène à la forme $a\,x + by + c = 0$.*

*Exemples :*

$5x+2y -3 = 0$

$-3x+7y -19=0$

$2x-10= 0$ *(cas particulier $b=0$)*

$y +1 = 0$ *(cas particulier $a=0$)*

$-7x+9y = 0$ *(cas particulier $c=0$)*

A la suite de cette introduction, le type de tâche résolution algébrique est étudié de la manière suivante : D'abord, l'accent est mis sur l'infinité des solutions qu'admet une telle équation. Nous constatons la présence d'une activité qui vise à installer la notion de couple solution d'une équation à deux inconnues. La substitution de valeurs numériques entières ou rationnelles prises par les couples de nombres proposés permet de tester l'égalité et de faire admettre aux élèves qu'en général ces équations du premier degré ont une infinité de solutions dans IR × IR.

*2) Solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues*

*<u>Activité</u> : Soit l'équation E : $2x-4y +5 = 0$. Dire dans les cas suivants si les couples sont solutions de E :*
*$(-5/2,0)$, $(1,7)$ $(-1/2,1)$ $(-3,2)$ $(-3/2,0)$ $(4,13/4)$*

*<u>Savoir</u> : Une équation du premier degré à deux inconnues admet une infinité de* solutions *dans IR × IR qui sont exprimées sous forme de couples.*

Ensuite, est abordée la technique de résolution algébrique d'une équation à deux inconnues au travers d'écritures d'expressions littérales paramétrées et d'ostensifs symboliques « ensemblistes » qui viennent supporter le propos théorique.

Notons à la suite de ce propos la présence du type de tâche « résoudre dans $IR^2$ une équation à deux inconnues donnée » portant sur des couples de nombres variés dans le domaine numérique réel : avec notamment la présence de couples d'irrationnels qui ont dû être testés, sans doute comme pour attester de façon plus pragmatique l'infinité de solutions d'une équation à deux inconnues.

*<u>2°Résolution par le calcul</u>*

*Soit E:* $a\,x + by + c = 0$

*sig* $by = -\,a\,x - c$

*sig* $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

$S_{IR}^2 = \{\,(x, -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}),\ x \in IR\,\}$

*Exemple: On considère l'équation E:* $3x - 5y + 7 = 0$

*1) Résoudre dans* $IR^2$ *l'équation E*

$3x\text{-}5y + 7 = 0$

*sig*$-5y = -3x - 7$

*sig*$-\ y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{7}{5}$

*sig* $y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{5}$

$S_{IR}^2 = \{(x,\ \dfrac{3}{5}x + \dfrac{7}{5})$ *avec* $x \in IR\}$

*2) Citer quelques solutions réelles de E*

$(0,7/5)$ ; $(4,19/5)$, $(-3,-2/5)$ $(\sqrt{2}\,, \dfrac{3\sqrt{2}+7}{5})$

Le travail de cette technique est mis en avant dans un exercice qui présente quatre équations données sous la forme canonique, parmi lesquelles trois sont à coefficients entiers ou rationnels et font réapparaître les cas particuliers de coefficients nuls, la quatrième est une équation qui dépend d'un paramètre mais dont la technique mise à l'oeuvre ne prête pas à discussion. Le choix d'exprimer y en fonction de x dans cette équation évite d'entrer dans une discussion autour du domaine de validité de l'expression littérale

$$x = \frac{-2y-3}{m}$$

*Exercice*

*Résoudre dans* $IR^2$ *les équations suivantes :*

***(E1)*** $\boldsymbol{5x - 2y + 1 = 0}$

*Sig* $2y = 5x + 1$

*sig* $y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}$

$S_{IR}^2 = \{(x,\ \dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}\ )$ *avec* $x \in IR\}$

***(E2) 2x -1= 0***
*Sig* $2x = 1$
*Sig* $x = \frac{1}{2}$
$S_{IR^2} = \{(\frac{1}{2}, y)$ *avec* $y \in IR\}$
***(E3)*** $y + \frac{3}{2} = 0$
*Sig* $y = -\frac{3}{2}$
$S_{IR^2} = \{(x; --\frac{3}{2})$ *avec* $x \in IR\}$
***(E4) mx +2y +3= 0***
*Sig* $2y = -mx - 3$
*sig* $y = -\frac{mx}{2} - \frac{3}{2}$
$S_{IR^2} = \{(x - \frac{mx}{2} - \frac{3}{2},)$ *avec* $x \in IR\}$

Toujours dans le cahier de Samia, le discours théorique visant à introduire le système de deux équations à deux inconnues se présente sous la même forme : l'objet de savoir est d'abord défini au travers d'une écriture contenant des paramètres puis on relève quelques exemples qui visent à installer la notion de « couple solution d'un système donné » et à généraliser cette notion pour un couple ($x_0$, $y_0$ ) donné.

*II- Systèmes de deux équations à deux inconnues*
*1) Définition :*
*Un système de deux équations à deux inconnues est la donnée de deux équations :*
$$\begin{cases} a\,x+by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$
*oŭ x et y sont les inconnues. Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois. Chaque couple est appelé solution du système.*
*Exemple :*
$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
*(2,3)*
$$\begin{cases} 4 \times 2 + 3 = 11 \text{ donc } (2,3) \text{ est solution du système} \\ 2 + 3 = 5 \end{cases}$$
*Plus généralement* $(x_0\,;\,y_0)$ *est solution du système (S) signifie*
$$\begin{cases} a\,x_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + by_0 = c' \end{cases}$$

La présentation des techniques de résolution par substitution, par élimination et par égalisation, est relativement homogène. Elle débute par un discours explicite autour de chaque technique, puis des exemples sont proposés avec une variété dans le choix des valeurs prises par les couples solutions (entières, rationnelles, réelles) mais qui restent à solution unique. On peut citer pour illustrer la technique par addition suivie d'un exemple :

*Résolution d'un système*
*a/ Méthode dite par addition*
*- Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.*
*- Remplacer dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée.*
*- Résoudre cette nouvelle équation.*
*Déterminer si elle existe la valeur de l'autre inconnue.*
*Résoudre dans $IR^2$ :*

$$\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4(5 + 3y) + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ 15y = -21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 + 3y \\ y = -21/15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 21/5 \\ y = -7/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4/5 \\ y = -7/5. \end{cases}$$

Cependant, aucune trace d'une justification logique par condition nécessaire et suffisante n'apparaît sur les exemples traités .On relève en tout 9 exemples de systèmes, trois exemples sont consacrés à chaque technique de résolution, parmi lesquels des systèmes qui correspondent aux trois cas d'ensembles de solutions suivis d'un discours théorique autour de la nature de l'ensemble des solutions d'un système donné de la manière suivante.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 (1) \\ 2x + 4y - 2 = 0 (2) \end{cases}$$

*On multiplie (1) par 2*

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \quad (1) \\ 2x + 4y - 2 = 0 (2) \end{cases}$$

*Les solutions de 2x +4y -2 = 0 sont infinies donc l'ensemble des solutions du système est*

$$S = \{(x, \frac{2-2x}{4}), x \in IR\}$$

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 (1) \\ x - 3y = 5 \quad (2) \end{cases}$$

*On fait la différence des égalités*

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \quad (1) \\ x - 3y = 5 \quad (2) \end{cases}$$

*0 = -3 impossible donc*
*S= Ø*
*Savoir*
*Un système d'équation peut avoir une solution unique, une infinité de solutions ou pas de solution.*

On retrouve ensuite quelques énoncés à travers lesquels est représenté un système dépendant d'un paramètre mais dont la résolution ne nécessite pas de discussion suivant la valeur du paramètre (on retrouve sans condition particulière sur m la valeur de x correspondante). On voit également apparaître un système non linéaire qui occasionne la présentation d'une technique de résolution algébrique s'appuyant sur un changement de variables :

*Résoudre dans IR²*
*$5x^2 + 6y^2 = 26$*
*$4x^2 - 12y^2 = 4$*
*On pose $X= x^2$ et $Y = y^2$ on obtient :*
*$5X + 6Y = 26$*
*$4X - 12Y = 4$*
*D'après le système précédent on a*
*$X = 4$ et $Y = 1$*
*$X^2 = 4$ et $y^2 = 1$*
*$x = 2$ ou $- 2$ et y 1ou -1*

Dans le cahier de ***Sara,*** l'organisation mathématique apprêtée autour des équations à deux inconnues s'appuie davantage sur des exemples numériques, que sur des écritures « paramétrées » avec des types de tâches qui font appel à des transformations d'écritures et au traitement de cas particuliers où les paramètres a, b ou c sont nuls. Mais tout comme dans le cahier de Samia, le traitement des cas particuliers semble constituer un enjeu d'enseignement au sein des deux thèmes d'étude, équations et systèmes d'équations.

Solutions d'une équation du 1er degré à deux inconnues
- Mettez chacune des équations sous la forme $ax + by = c$
*$2x - 3y + 5 = 7x + 4y - 1$
sig $2x - 3y - 7x - 4y = -1 - 5$
sig $-5x - 7y = -6$
* $\frac{2}{3}x - y = \frac{2}{3}x + 5y - \frac{4}{3}$
sig $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x - y - 5y = -\frac{4}{3}$
sig $0x - 6y = -\frac{4}{3}$
Soit l'équation $x + 2y = 100$.
La possibilité $x = 50$ et $y = 25$ vérifie l'équation car $50 + 2 \times 25 = 100$ ; on dit que le couple (50,25) est une solution de l'équation de même (30,35) est une solution.
**Exercice** :
Soit $2x - 4y = 6$
(5,1), (1,5) (1,-1) (-3,1) (1/3, -3/2) sont-ils des solutions de cette équation.
Chercher x et y sachant que (x, 3) et (2, y) sont des solutions de l'équation
* Résoudre dans IR²
* $5x - 3y = 3$
sig $5x = 3 + y$ sig $x = \frac{3+y}{5}$ $S_{IR}{}^2 = \{(\frac{3+y}{5}, y), y \in IR\}$
*$x+y = 0$*
*Sig $x = -y$*
*Donc $S_{IR}2 = \{(-y, y), y \in IR\}$*
*$x = 1$ Donc $S_{IR}2 = \{(1, y), y \in IR\}$*
*$y = 7$Donc $S_{IR}2 = \{(x,7), x \in IR\}$*

Par contre, les arguments technologico-théoriques qui viennent légitimer les techniques de résolution algébrique des systèmes sont davantage développés. L'accent est mis sur l'équivalence de systèmes d'équations en rapport avec les règles de conservation de l'égalité :

*2) Systèmes équivalents*
*Savoir*
*Deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions*
*Exemples :*

$$(S)\ \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$(S')\ \begin{cases} 2x+4y=10 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$$

$$(S'')\ \begin{cases} x=5-2y \\ x=1+y \end{cases}$$

*(S) (S') et (S'') sont des systèmes équivalents*

### I.1.2 Un travail quasi-exclusif et isolé des techniques algébriques

Ainsi « précédées » d'éléments de discours technologico-théorique définissant les objets de savoir algébrique et les légitimant, trois techniques de résolution algébrique des systèmes d'équation sont étudiées : les techniques par élimination / substitution et égalisation. Ces techniques sont présentées par « ostension » dans la partie identifiable à un « cours » à partir d'exemples de systèmes à coefficients numériques entiers ou rationnels et admettant une solution unique. Dans la partie consacrée « aux exercices d'application » on relève un exemple de systèmes de deux équations à deux inconnues dont la forme est plus complexe. La résolution est accompagnée d'une explicitation technologique des sous tâches qui composent la technique mise à l'œuvre comme on peut le voir sur cet extrait de cahier:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ \dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{y}{y-2}=0 \end{cases}$$

*Equivaut à*

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ \dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{y}{y-2} \end{cases}$$

*Produit des moyens est égale au produit des extrêmes*

$$\begin{cases} 3x-2y= \\ (x-2)(y-2)=y(x+3) \end{cases} \text{ équivaut} \quad \text{on développe}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ xy-2x-2y+4=xy+3y \end{cases} \text{ on simplifie}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ xy-xy-3y-2x-2y+4=0 \end{cases} \text{ équivaut}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x-5y+4=0 \end{cases} \text{ On multiplie la première par 2 et la deuxième par 3 et on fait la somme}$$

$\begin{cases} 6x - 4y - 2 = 0 \\ -6x - 15y + 12 = 0 \end{cases}$ *équivalent*

$\begin{cases} 6x - 4y - 2 = 0 \\ -19y = -10 \end{cases}$ *équivalent*

$\begin{cases} 6x - 4y - 2 = 0 \\ y = -10/-19 = 10/19 \end{cases}$ *équivalent*

$\begin{cases} 3x - 2 \times 10/19 = 1 \\ y = 10/19 \end{cases}$

$3x = 19/19 + 20/19 = 39/19$ *donc* $x = 13/19$

$S_{IR}2 = \{(13/19, 10/19)$

La majorité voire la quasi-totalité des exercices de ces deux cahiers d'élèves au sein des thèmes » équations et systèmes d'équations » « système d'équations », portent en fait sur le travail explicite des techniques de résolution présentées, sans que ce travail ne nourrisse la résolution de problèmes à mettre en équations, totalement absente de l'organisation mathématique étudiée.

### I.1.3 Une étude partielle de la technique graphique

Dans les deux cahiers, la technique graphique de résolution d'une équation à deux inconnues et de résolution d'un système d'équation est abordée à la suite de la présentation des techniques de résolution algébrique.

Ainsi toujours dans le cahier de *Sara*, la représentation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues semble être présentée sans arrière plan technologique d'aucune sorte. L'organisation mathématique développée correspond à une étude des trois cas possibles qui correspondent aux paramètres a ou b nuls, s'appuyant sur des exemples de tracés de points. La nature de la représentation graphique d'une équation à deux inconnues se réalise sur la base d'un simple constat d'alignement de trois points choisis arbitrairement.

***Représentation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues :***

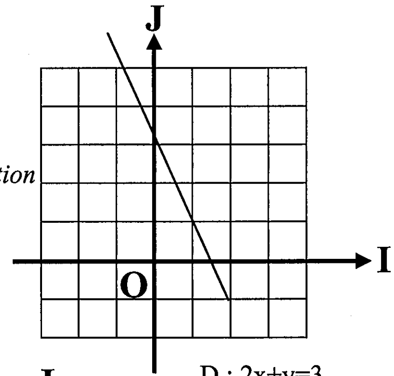
*Soit l'équation $2x + y = 3$*

*(1,1) (0,3) (2,-1) sont des solutions*

*Les points A (1,1), B(0,3) et C(2,-1) sont alignés sur la droite D.*

*D est la représentation graphique des solutions de l'équation $2x + y = 3$*

*Ainsi les coordonnées de chaque point de D désignent une solution de l'équation*




D : 2x+y=3

*Exercice*

*Représenter graphiquement les solutions de l'équation $3x+y = 5$*

- *$3 \times 1 + 2 = 5$ donc (1,2) solution*
- *$3 \times 2 + (-1) = 5$ donc (2,-1) solution*
- *$3 \times 0 + 5 = 5$ donc (0,5) solution*

Cas particuliers

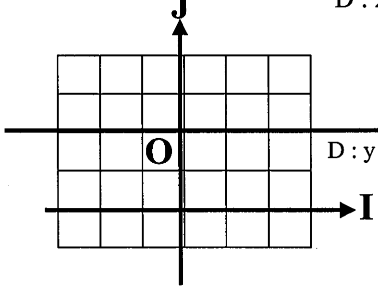
*Représenter graphiquement les solutions de l'équation y = 2

ax +by =c

0x +y = 2

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 0 |
| y | 2 | 2 |

A (1,2), B (0,2)




D : y = 2

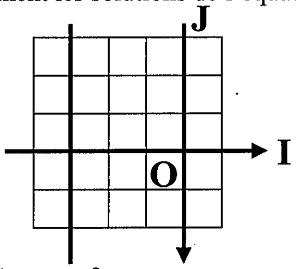
*Représenter graphiquement les solutions de l'équation x = -3

a x +by =c

1x +0y = -3

| | | |
|---|---|---|
| x | -3 | -3 |
| y | 0 | 1 |

A (-3,0), B (-3,1)




Δ : x= -3

*Savoir*

*La représentation graphique des solutions de l'équation y = c est la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point M (0, c).*

*La représentation graphique des solutions de l'équation x = c est la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point M(c, 0).*

L'organisation mathématique développée dans le cahier de Samia autour de la technique graphique de résolution des systèmes d'équations, se présente sous la même forme et laisse penser que ce n'est pas la résolution graphique qui semble l'objectif visé par l'étude de ce thème. Les seuls graphiques qui apparaissent dans ce cahier, que ce soit au sein de la partie identifiable au « cours « de l'enseignant ou de la partie « exercices », sont ceux qui correspondent à l'étude des trois cas possibles d'ensembles de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, qui est fondée sur les trois positions relatives de deux droites dans le plan.

*Résoudre graphiquement*

$$\begin{cases} 3x+6y = 9 \\ x+y = 5 \end{cases}$$

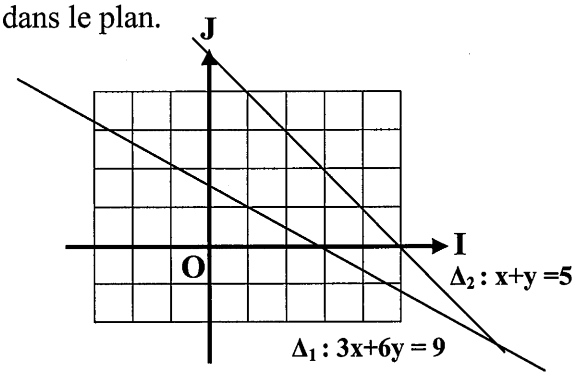
$\Delta_1 : 3x+6y = 9$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *3* |
| *y* | *3/2* | *0* |

$\Delta_2 : x+y = 5$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *5* |
| *y* | *5* | *0* |

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{(7,-2)\}$




$$\begin{cases} x-2y = 4 \\ x-2y = 1 \end{cases}$$

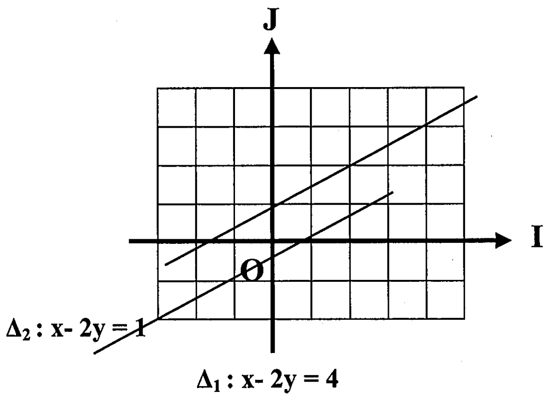
$\Delta_1 : x-2y = 4$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *4* |
| *y* | *-2* | *0* |

$\Delta_2 : x-2y = 1$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *1* |
| *y* | *-1/2* | *0* |

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$



$$\begin{cases} x-y = 4 \\ 2x-2y-8=0 \end{cases}$$

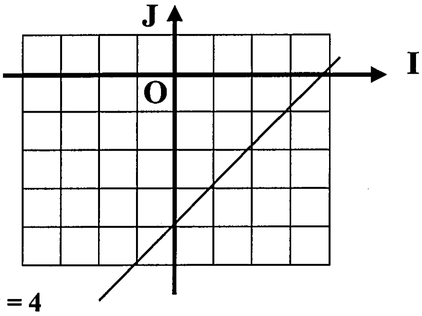
$\Delta_1 : x-y = 4$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *2* |
| *y* | *-4* | *-2* |

$\Delta_2 : 2x-2y-8=0$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *3* |
| *y* | *4* | *-1* |

$\Delta 1 \cap \Delta 2 = \Delta 1$




**$\Delta_1$ : x-y = 4**
**$\Delta_2$ : 2x- 2y -8=0**

En résumé, on peut dire que dans ces deux cahiers, l'enseignement des équations à deux inconnues et des systèmes linéaires est fortement organisé autour de la résolution algébrique, se basant sur un formalisme en lien avec les notions d'ensembles. Il est ainsi possible de voir qu'une équation à deux inconnues possède une infinité de solutions et que l'intersection des ensembles infinis de solutions pour un système d'équation donnés aboutit à une solution unique ou à une infinité de solution dans le cas d'équations équivalentes. Cette technique algébrique est travaillée de manière isolée sans être investie dans un contexte de résolution de problèmes. Signalons, d'ailleurs, l'absence frappante de travail sur la mise en équation alors qu'une place importante est accordée au discours technologico-théorique, qui légitime et justifie les techniques de résolution algébrique dont le travail est largement prépondérant dans les exercices. Les techniques graphiques mises à l'œuvre sont muettes et apparaissent plus à titre d'illustration, ou « pour donner corps » aux objets de savoir algébrique. Les organisations mathématiques ainsi étudiées renvoient selon nous, à des caractéristiques de praxéologies développées pendant la période de la réforme comme l'a fait remarquer Coulange (2000) dans ses travaux :

« Ces réflexions autour de la disparition d'une dialectique entre arithmétique et algèbre et de la « mort » des problèmes « concerts » sont vraisemblablement symptomatiques d'une absence d'enjeux didactiques associés à la mise en équation de problèmes pendant la période de la réforme » (Coulange 2000, p.123) .

L'absence de tout travail isolé de la technique graphique et d'une articulation entre les registres algébrique et graphique au sein des cahiers de *Samia* et *Sara,* sont des points qui renvoient aussi à une tendance de l'enseignement de l'algèbre de l'époque. Cela ne semble pas être le cas pour les cahiers de Sandra et de Meriam, qui semblent accorder davantage d'importance à l'aspect graphique du travail algébrique.

## I.2 Le cahier de Sandra : Une tendance davantage marquée contre réforme

Le cahier de *Sandra* présente certains points communs avec celui de *Sara*. En effet, les objets de savoirs « équations à deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues » sont d'abord définis théoriquement, puis sont suivis des techniques algébriques de résolution. Ces techniques sont présentées par « ostension » sur des exemples de systèmes à coefficients entiers ou rationnels, certes sans écritures littérales ou paramétrées. Le travail algébrique autour des équations et des systèmes d'équations bien que dominant au sein des organisations mathématiques enseignées parait plus pauvre et moins varié que celui étudié dans les cahiers précités. Cependant, ces techniques sont à caractère faible, puisqu'on ne trouve aucun propos d'ordre technologique ou théorique correspondant à une justification de la conservation de l'équivalence pour les méthodes par substitution, par élimination et par égalisation retrouvé par exemple dans le cahier de *Sara*. Par ailleurs, même si dans ce cahier le travail algébrique semble prépondérant et confiné dans un rapport à l'algébrique purement « techniciste », une attention assez discrète semble être accordée à l'approfondissement de la technique de résolution graphique.

### I.2.1 Une reprise totalement détournée d'une activité du manuel

A la suite de l'introduction des équations à deux inconnues, on voit apparaître dans le cahier de Sandra une activité extraite du manuel officiel correspondant à la période « moderne », dont l'objectif est de faire accéder les élèves à la technique graphique de résolution d'une équation à deux inconnues. Nous commençons par citer l'énoncé de l'activité :

*On se propose de trouver deux nombres m et n tels que le tiers de leur différence est égal à leur somme.*

1. *Mettre le problème en équation.*
2. *Donner une valeur du couple (m, n).*
3. *Le couple (3/5,11) répond-il au problème ?*
4. *On suppose que n = 3. Trouver m.*
5. *a)Donner cinq couples (m,n) qui sont solutions du problème.*
   *b) Placer les points de coordonnées (m,n) dans le plan muni d'un repère (o,oi,oj) . Que remarque-t-on ?*

Les consignes suggérées par cette activité comme nous pouvons le constater, s'organisent autour des types de tâches : mise en équation, recherche de couples de valeurs numériques solutions de l'équation et représentation graphique des points dont les coordonnées ont été choisies arbitrairement. Le dernier questionnement laisse le choix à l'enseignant de faire admettre aux élèves, que la représentation graphique d'une telle équation est une droite en s'appuyant, soit sur un simple constat d'alignement soit en justifiant la technique de pointage par un retour sur les connaissances des élèves à propos des fonctions affines. Ainsi le caractère faible ou fort de la technique graphique reste entièrement dans le topos du professeur.

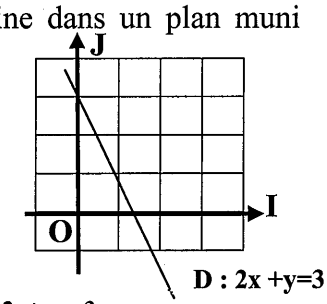
Etudions à présent les traces écrites des organisations mathématiques développées autour des équations à deux inconnues, à partir de cette activité :

*1)* $\frac{1}{3}(m-n) = m+n$
$m-n= 3(m+n)$
$m-n= 3m+3n$
$m-n-3m-3n= 0$
$-2m-4n = 0$
$-2(m+2n)= 0$
$m+2n = 0$ *: c'est une équation du premier degré à deux inconnues, le couple (m,n) est une solution de cette dernière.*
*2)* $m = -2n$
$S_{IR^2}= \{(-2n, n), n \in IR\}$
*3) Le couple* $(3/5,11) \in S_{IR}2$ *?*
$m = -2n$
$3/5= -2\times 11$
$3/5 = -22$ *impossible*
*(-2,1) ; (0,0) (-4,2) (4,-2) (-1,1/2)*
***Remarque :*** *Une équation du premier degré à deux inconnues est l'équation cartésienne de la représentation graphique d'une fonction affine.*

Nous constatons d'abord la présence de l'équation qui modélise la situation évoquée sans justification, la technique de mise en équation ainsi mise à l'œuvre parait « invisible » et orientée vers un travail de transformation des écritures algébrique. L'équation trouvée est ramenée par des techniques algébriques (développement, transposition des termes, simplification) à la forme canonique ax +by = c. On voit ensuite apparaître la technique algébrique autour de résolution d'une équation à deux inconnues qui fait appel une transformation algébrique pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre. La réponse est formulée en termes d'ensemble infini de solutions dans IR× IR. Le langage ensembliste d'appartenance et d'ensemble est utilisé, soit pour présenter des couples de nombres soit pour tester le couple de nombre proposé. Finalement, le travail graphique n'apparaît pas, mais la remarque qui subsiste à la fin de l'activité semble amorcer une articulation entre les registres algébrique et graphique en prenant appui sur les notions d'équation cartésienne de droite et de fonctions affines.

### I.2.2 Un travail explicite autour de la technique graphique

A la suite de cette activité, un intitulé apparaît « Représentation graphique des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues ». L'organisation de l'étude présentée semble davantage approfondir le travail autour du graphique. On voit apparaître sur un exemple (par ostension) le type de tâche « représenter graphiquement les solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues » accompagné d'une technique forte. Soulignons l'importance nouvelle qui semble être accordée à la technologie sous-jacente au travail graphique. On voit apparaître un propos technologique mettant en lien les formes cartésiennes et réduites des équations de droites avec la représentation graphique d'une application affine dans un plan muni d'un repère cartésien.




*Soit l'équation 2x+y = 3*
*(1,1) ; (2,-1) ; (0,3) ; (3,-3) sont des solutions*
*D : 2x+y – 3 = 0*
*Sig y = -2x+3 c'est l'équation de la droite représentation*
*Graphique de l'application affine x ⟶ -2x + 3 .*
*Les coordonnées de **chaque point de D désignent une solution de l'équation 2x+y = 3***
***Savoir :** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien du plan , la représentation graphique des solutions de l'équation*
*ax +by = c, (a,b) ≠ (0,0) est une droite.*

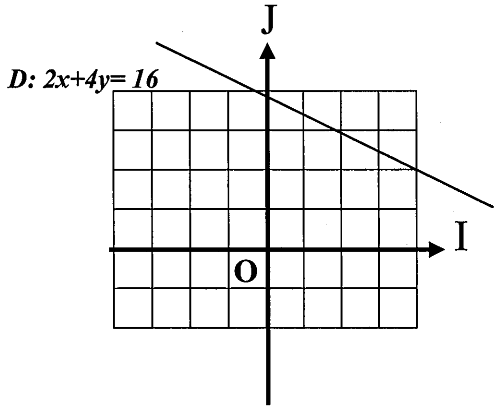
### I.2.3 Un travail de la technique graphique en lien avec la résolution algébrique

Le travail de la technique graphique est ensuite repris sur des exemples d'équations qui parmi lesquels sont présentés les cas particuliers de droites parallèles aux axes du repère. Puis quatre exemples sont proposés qui mettent l'accent sur les techniques algébriques et graphiques autour de la résolution des équations à deux inconnues avec un choix plus diversifié des paramètres a, b et c de l'équation. Le graphique qui accompagne la résolution algébrique permet de visualiser l'infinité des couples solutions d'une équation à deux inconnues :

*Application*
*Résoudre algébriquement puis graphiquement les équations suivantes*
*1)2x+4y= 16*
*2x = 16-4y*
$X = \frac{16-4y}{2} = 8\text{-}2y$
*SIR2 = {(8-2y, y), y ∈ IR}*

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 2 |
| y | 2 | 3 |

*2)2x+y= 0*
*3)3x = 5*
*4) 2y = 1.*



Les organisations mathématiques mises en place autour de la résolution algébrique des systèmes d'équations rejoignent celles développées dans les cahiers de *Sara.* Toutefois le symbole d'équivalence logique apparaît sans aucune justification théorique comme s'il jouait le rôle d'un dispositif technologique par lequel l'efficacité technique peut se démontrer. Ces techniques sont présentées par ostension, puis suivies du travail autour de la résolution graphique qui s'organise de manière identique à celle présentée pour les équations à deux inconnues. On revoit une explicitation de la technique graphique qui s'appuie sur le travail autour des équations à deux inconnues et le traitement des trois cas, qui correspondent aux positions relatives des droites dans le plan. L'ensemble des solutions communes aux deux équations est toujours défini. On peut citer le premier exemple abordé :

*Représentation graphique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations à deux inconnues*
*Soit le système*

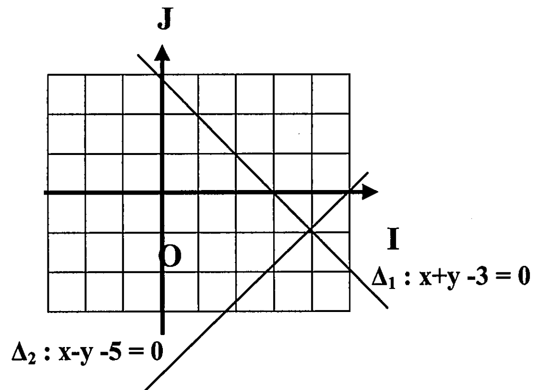
$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x-y = 5 \end{cases}$$

$\Delta_1 : x+y-3 = 0$ *sig* $y = -x+3$ *représentation graphique de l'application affine* $x \longrightarrow -x+3$
$\Delta_2 : x-y-5 = 0$ *sig* $y = x-5$ *représentation graphique de l'application affine* $x \longrightarrow x-5$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *3* |
| *y* | *3* | *0* |

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *5* |
| *y* | *-5* | *0* |

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = M$ *avec* $M(4,-1)$
$S_{IR^2} = \{(4,-1)\}$




## I.2.4 Une interrelation des techniques algébriques et graphiques dans la résolution des systèmes d'équations

On dénombre dans la partie réservée aux applications et aux exercices six exemples autours du type de tâche « résoudre algébriquement et graphiquement les systèmes de deux équations donné ».Les systèmes présentés sont tous à coefficients entiers ou rationnels. L'accent est mis sur une interrelation entre les registres algébrique et graphique qui renvoient à la période de la contre réforme soulignée par Coulange (2000) :

> « La résolution graphique se retrouve étroitement interreliée à la résolution algébrique : selon la consigne donnée, il s'agit toujours de « résoudre algébriquement et graphiquement des systèmes ». Soulignons qu'à ce sujet, cette partie du manuel se situe véritablement en continuité des idées directrices de la contre « réforme qui mettent en avant ce travail conjoint des techniques algébriques et « géométriques » (Coulange 2000, p.132).

Cet intérêt pour le travail graphique mis en avant dans le cahier de Sandra, est encore davantage renforcé dans le cahier d'une élève surnommée Meriam. Pour le coup, le contenu de ce dernier cahier parait davantage conforme à la période de la « contre réforme ».

## I.3 Le cahier de *Meriam* : Contre-réforme

Les organisations mathématiques développées dans le cahier de *Meriam* présentent des caractéristiques qui renvoient aux praxéologies développées pendant la période de la contre réforme. Ainsi dés le départ, l'aspect graphique est mis en avant dans le sens de la construction d'une interrelation étroite entre l'enseignement de l'algèbre et de la géométrie.

### I.3.1 Des objets de savoir introduits dans un contexte géométrique

Le contenu de ce cahier montre d'abord des objets de savoir algébrique, introduits dans un contexte géométrique, en prenant appui sur le registre graphique. Dés le départ, on ne fait pas émerger l'objet « équation à deux inconnues » au sein de l'organisation globale. Il s'agit d'explorer à travers une activité introductive l'ensemble infini des points du plan dont les coordonnées sont solutions d'une équation linéaire à deux inconnues.

*I- Ensemble des points M(x,y) du plan vérifiant a x +by +c = 0*
*Activité*
*Soit* $\Delta = \{M(x, y) / 2x - y + 3) = 0\}$
1) *Vérifier si les points A (-1,1), B (0,3) C (-5,4) D (2,0) E (-3/2,0) appartiennent à* $\Delta$.

$A\ (-1,1) : 2\times(-1) - 1 + 3$
$= -2-1+3$
$= 0$ *donc* $A \in \Delta$
$B\ (0,3) / 2\times(0) - 3 + 3$
$= -3+3$
$= 0$ *donc* $B \in \Delta$
$C\ (-5,4) / 2\times(-5) - 4 + 3$
$= -10 - 1$
$= -11$ *donc* $c \notin \Delta$

### I.3.2 Des techniques de résolution prenant appui sur le registre graphique

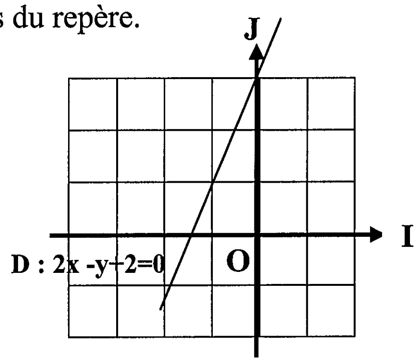
Dans cette perspective, les praxéologies développées autour de la résolution des équations à deux inconnues renvoient à la recherche du lieu géométrique de points M(x, y) vérifiant la relation a x +by +c = 0. Par rapport aux cahiers de *Samia*, de *Sara* et de *Sandra*, l'organisation mathématique développée autour de la résolution graphique, vient explicitement supporter le travail algébrique graphique et permet dès lors de se passer du formalisme algébrique caractéristique des périodes d'enseignements passées, comme le souligne Coulange (2000)

« La résurgence du langage « ensembliste » trouve d'ailleurs sans doute ici sa principale raison d'être dans ce rapprochement entre algèbre et géométrie : la droite correspondant à une équation linéaire à deux inconnues est défini comme « ensemble » infini de point ; ceci permet dans l'esprit de la contre réforme de visualiser l'infinité de solutions qu'admet une telle équation » (Coulange 2000, p .130).

La présentation de cette technique qui fait toujours apparaître la forme cartésienne de la droite est directement étendue aux cas particuliers des paramètres *a* et *b* nuls, en associant la position relative des droites avec les axes du repère.

*Soit* $\Delta = \{M(x, y) / 2x - y + 3) = 0\}$

2) *Construire dans un repère orthonormé les points du 1)*
3) *Que pouvez vous en déduire ?*



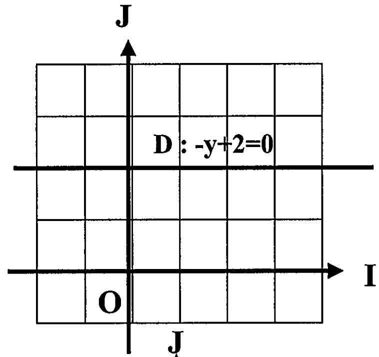

L'ensemble $\Delta = \{M(x,y) / 2x - y + 3) = 0\}$ *est une droite*

***Cas particulier***

*1^er^ cas* $a = 0$

*Construire* $D = \{M(x, y) / -y + 2 = 0)$ *dans le repère (o,i,j)*

| | A | B |
|---|---|---|
| x | 1 | 2 |
| y | 2 | 2 |



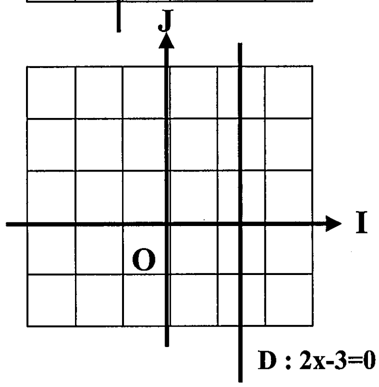

*La droite D est parallèle à l'axe des abscisses*

*2^ème^ cas* $b = 0$

*Construire* $D = \{M(x,y) / 2x - 3 = 0)$

| | C | D |
|---|---|---|
| x | 3/2 | 3/2 |
| y | 1 | 2 |

*La droite D est parallèle à l'axe des ordonnées*




A la suite de cette présentation, la solution d'un système d'équations est présentée comme point d'intersection éventuel d'ensembles infinis de couples solutions de deux équations à deux inconnues.

*Activité*
*Résoudre graphiquement le système de deux équations à deux inconnues réelles*

$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 4x - y - 17 = 0 \end{cases}$

*D = {M(x,y) / 2x +y -7 = 0 }*

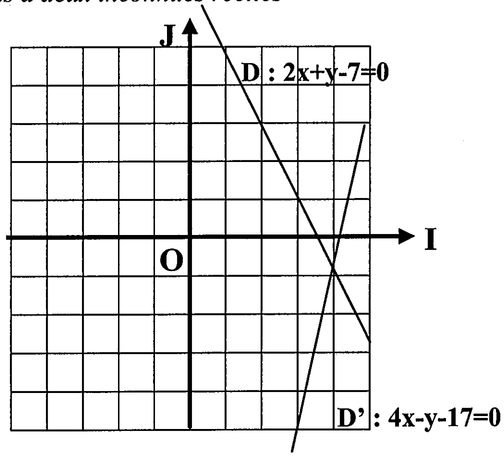
| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 2 |
| y | 5 | 3 |

$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 4x - y + 17 = 0 \end{cases}$

*D'= {M(x,y) / 4x-y-17 = 0 }*

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 3 |
| y | -1 | -5 |

$S_{IR}{}^{2} = \{(4, -1)\}$




*Remarque:*
*Les coordonnées des points d'intersection des deux droites sont la solution du système*

A la suite de cette présentation de la technique graphique de résolution des systèmes d'équations, nous retrouvons un nombre relativement important d'exercices qui portent sur le travail de cette technique (6 exemples de systèmes à cœfficients entiers ou rationnels sont proposés dans ce cahier). Le type de tâche « résoudre graphiquement les systèmes d'équations donnés » s'étend à l'étude des trois cas particuliers d'ensembles de solutions, qui correspondent aux positions relatives de deux droites dans le plan. Cependant, et contrairement à ce qu'on a pu observer dans les autres cahiers, la formulation des réponses n'est pas apportée sous une forme algébrique .Un discours technologique supporté par la visualisation sur le graphique supplante le formalisme algébrique. Dans le cas ou l'ensemble des solutions d'un système est infini, on ne voit pas apparaître l'ensemble de couples de nombres $\{(x, \ldots), x \in IR\}$ solutions dans $IR \times IR$. Un commentaire permet de visualiser graphiquement l'infinité de solutions :

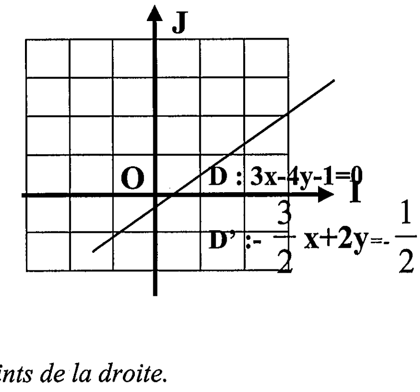
*Résoudre graphiquement le système*

$\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x + 2y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

*D = {M(x,y) / 3x-4y-1 = 0 )*
*A (1,1/2) B(3, 2)*

$D' = \{ M(x,y)) \ \dfrac{3}{2}x + 2y = -\dfrac{1}{2} \}$

*C (3,2), D (1/3,0)*
*Les droites sont confondues et les solutions sont donc tous les points de la droite.*



### I.3.3 Un lien ténu entre équation de droite et courbe de représentation d'une fonction affine

Comme nous l'avons déjà souligné, le type de tâche résolution graphique d'un système d'équation occupe une place relativement importante au sein des activités et des exercices présentés dans ce cahier. Notons tout de même la présence d'un énoncé qui met en avant le lien entre les fonctions affines et les systèmes d'équations : C'est d'ailleurs la seule occasion ou l'on a retrouvé une trace d'une articulation entre les résolutions graphique et algébrique d'un système d'équations.

*On considère les fonctions affines f et g définies par f : IR → IR qui à x → 3x-2 et g : IR → IR qui à x → 2x+4*

1) *Construire les fonctions affines f et g.*
2) *Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $C_f$ et $C_g$*

*3) On considère le système*

$$\begin{cases} 2x-y+4=0 \\ -3x+y+2=0 \end{cases}$$

*Résoudre le système par la méthode d'égalisation. Que remarquez-vous ?*

### I.3.4 Des techniques algébriques sur la base d'exemples

Dans ce cahier, la résolution algébrique occupe une place nettement moins importante que celle relevée dans les cahiers précédents. En effet, le type de tâche résolution algébrique des équations à deux inconnues ne fait plus l'objet d'enseignement, seules les techniques algébriques des systèmes d'équations sont enseignées à la suite de la technique graphique avec un appauvrissement visible de l'algèbre enseignée. Nous voyons apparaître sur des exemples, les trois méthodes de résolution, par addition, par substitution et par égalisation. Les techniques sont présentées par ostension. Elles apparaissent de ce fait, faibles voire « muettes »puisqu'on ne relève aucune trace d'un discours technologique qui justifie la conservation de l'équivalence, l'ostensif langagier « *signifie* » semble suffire à pointer le contrôle logique des solutions, absent de l'organisation mathématique étudiée. Tous les systèmes sont non seulement présentés sous la même forme (canonique), mais ils comportent tous des équations à coefficients entiers et admettant une solution unique .Citons par exemple la technique par substitution présentée :

*Méthode par substitution*
*Résoudre dans $IR^2$ le système*

$$\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ -x+2y+9=0 \end{cases} \quad \textit{signifie}$$

$$\begin{cases} y=-3x-1 \\ -x+2(-3x-1)\,y+9=0 \end{cases} \quad \textit{signifie}$$

$$\begin{cases} y=-3x-1 \\ -7x+7=0 \end{cases} \quad \textit{signifie}$$

$\begin{cases} y = -3 \times 1 - 1 \\ x = 1 \end{cases}$ *signifie*

$\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$ *signifie*

$S_{IR^2} = \{(1,-4)\}$

*Résoudre dans $IR^2$ le système suivant par substitution*

$\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ *ect...*

## I.3.5 Une mise en équation qui a statut de problème d'application

Contrairement aux cahiers précités où la mise en équation est absente du savoir à enseigner, celui de *Meriam* laisse entrevoir quelques problèmes autour de ce type de tâche qui n'apparaissent qu'en toute fin de l'étude. A titre d'exemple, on peut illustrer le problème issu du cadre des grandeurs présenté comme application et qui met en avant le découpage de la technique : choix et désignation des inconnues, mise en équations, résolution et interprétation du résultat :

*L'aire d'un rectangle de périmètre 36 m ne change pas si on diminue sa longueur de 4m et on augmente sa largeur de 3m. Trouver les dimensions du rectangle.*
*Choix des inconnues : x longueur et y largeur du rectangle*

*Mise en équations* $\begin{cases} 2x+2y = 36 \\ (x-4)(y+3) = xy \end{cases}$

*Solutions* $\begin{cases} 2x+2y = 36 \\ xy-4y+3x-12 = xy \end{cases}$

*sig* $\begin{cases} x+y = 18 \\ 3x-4y = 12 \end{cases}$

*Sig* $\begin{cases} y = 18-x \\ 3x-4(18-x) = 12 \end{cases}$

*Sig* $\begin{cases} 3x+4x-72 = 12 \\ y = 18-x \end{cases}$

$7x = 12+72=84$
$y = 18-x$
$x = 84/7 = 12$

*sig* $\begin{cases} y = 18-12 = 6 \\ x = 12 \end{cases}$

*la largeur du rectangle est donc 6 m et sa longueur est 12 m.*

La mise en équation n'occupe toutefois pas une place très importante au sein de l'organisation mathématique développée. Elle intervient plutôt à titre de problème d'application. Par ailleurs, sur les deux énoncés consacrés à la mise en équation dans le cahier de *Meriam*, on ne relève pas de traces d'explicitation sur la mise en équation et la traduction des informations en systèmes de deux équations.

En résumé, nous pouvons dire que le travail autour du graphique représente la principale caractéristique de ce cahier. Contrairement aux cahiers précédents, le graphique prend visiblement le pas sur l'algébrique. Le travail autour de la mise en équation ressurgit avant tout à titre d'application.

Toutefois, certaines caractéristiques du contenu du cahier de *Meriam* comme la présentation des techniques algébriques « par ostension », la présence de quelques énoncés de mise en équation, l'interrelation tenue entre fonction affine et équation de droite faite au détour d'un énoncé peuvent être considérées comme des points de rapprochement avec les tendances de la période contemporaine, voire moderne.

# II. Des références à la réforme « contemporaine »

## II.1 Le cahier de *Ramzi*

Nous avons pu observer dans le cahier de *Meriam*, un arrière plan théorique autour du travail graphique qui vient soutenir le travail algébrique autour des équations et des systèmes d'équations. Les objets de savoir apparaissent dans un contexte géométrique ou au travers de tâches isolées autour de la résolution algébrique.
Cette approche ne sera pas celle étudiée dans le cahier de Ramzi : dès le départ, les équations et les systèmes d'équations sont introduits dans un contexte de résolutions de problèmes.

### II.1 .1 La mise en équation : un enjeu d'enseignement

Parmi les cahiers recueillis, l'étude du contenu du cahier de *Ramzi* donne à voir des organisations mathématiques quasi-conformes à celles mises à l'étude à l'époque contemporaine. Le rapport à l'algèbre développé dans les praxéologies étudiées s'organise autour de la dimension « outil » de l'algèbre. Que ce soit au sein du thème équations ou systèmes d'équations, la mise en équation est un véritable enjeu d'enseignement. Les tâches de conversion et de traduction entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques, apparaissent clairement et sont accompagnées de techniques explicites. Tout comme dans le manuel officiel de l'époque, une « méthode » un peu systématique de mise en équation est mise en avant, au fil de toutes les activités et exercices des deux thèmes d'étude.

*On dispose d'une orange et d'une pomme de masses inconnues et de deux masses marquées 200gr et 300gr et d'une balance à deux plateaux. un premier équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, un 2ème équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre*
*1) Mettre le problème en système de deux équations du 1er degré à deux inconnues*
*Choix des inconnues :*
*x désigne la masse de la pomme*
*y désigne la masse de l'orange*
*La mise en équation*

*Le premier équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et l'autre contient la masse de 500gr équivaut à $x + y = 500$.*
*Le $2^{ème}$ équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre équivaut à $y + 200 = x$*
*on a* $\begin{cases} x + y = 500. \\ y + 200 = x \end{cases}$

### II.1.2 Des objets de savoir algébriques introduits en prenant appui sur le registre numérique

Les organisations mathématiques enseignées autour de la résolution des équations et des systèmes d'équations prennent toujours pied sur un contexte numérique : des types de tâches tels que « vérifier qu'un couple de nombres donné est solution d'une équation ou d'un système d'équations », ou « déterminer des couples de nombres vérifiant une équation ou un système d'équations donné » apparaissent en amont pour donner du sens à ce que signifie la solution d'une équation ou d'un système d'équations. La praxéologie développée commence ainsi par installer la notion de couple de nombres, en la faisant fonctionner sur des exemples numériques sans la formaliser d'emblée :

*1) Activité*
*Quatre joueurs A, B, C, D se déplacent sur un terrain en essayant de former un rectangle de périmètre 100m*
*a) Que peuvent être les valeurs des distances AB entre A et B d'une part et BC entre B et C d'autre part.*

| *AB* | *AC* |
|---|---|
| *30* | *20* |
| *15* | *25* |
| *40* | *10* |
| *25* | *25* |

*Puisque 30 et 20 vérifient $30 + 20 = 50$ on dira que le couple (30,20) vérifie l'équation $x + y = 50$*
*Le couple (15, 35) vérifie l'équation $x+y = 50$*
*Le couple (22,34) ne vérifie pas l'équation, puisque $22+34 \neq 50$*

### II.1.3 Des techniques algébriques introduites avec une dialectique ancien-nouveau

A partir de cette entrée numérique, les praxéologies développées autour de la résolution algébrique des équations et des systèmes évoluent très progressivement. Ce qui conduit, d'ailleurs, le statut des lettres à évoluer progressivement au fil des tâches proposées (lettre étiquette, inconnue, paramètre, indéterminée, variable).

Ainsi au fil de l'activité suivante, il s'agit tout d'abord de trouver la valeur d'une inconnue connaissant l'autre : ce qui revient à résoudre une équation à une inconnue.

*a) On considère l'équation $3x - y = 5$*
*(...) les couples (m,-1) et (3,n) sont solution de l'équation $3x-y = 5$, calculer m et n*
*$3m-(-1) = 5$ équivaut à*
*$3m+1 = 5$ équivaut à*

*$3m = 5-1$ équivaut à*
*$3m=4$ équivaut à*
*$m = 4/3$*
*Le couple (3, n) est solution de $3x - y = 5$ équivaut à $3 \times 3 - n = 5$*
*$3 \times 3 - n = 5$ équivaut à*
*$9-n = 5$ équivaut à*
*$-n = 5 - 9$ équivaut à $n = -4$*

S'ensuit une activité qui convoque le type de tâches « exprimer une inconnue en fonction de l'autre » permettant d'exprimer l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues.

*b) On considère l'équation $3x - y - 5 = 0$*
- *Exprimer y en fonction de x*
- *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $S = \{(x, \ldots), x \in IR\}$*

Ainsi chaque technique algébrique est progressivement introduite avec une prise d'appui presque toujours explicite sur des connaissances anciennes soit numériques, soit algébriques (relatives à des transformations d'une équation à une inconnue). Une dialectique assez claire ancien-nouveau paraît mise en place.

Notons que chaque technique de résolution algébrique est introduite à partir d'exemples (il n'y a pas de tentative de formalisation ou de généralisation à travers des écritures paramétrées). En ce qui concerne les systèmes d'équations, les techniques étudiées sont celles suggérées par le manuel de la période contemporaine : égalisation, substitution et élimination. Un bref discours technologique autour des « systèmes équivalents » précède la présentation de ces techniques. Mais ce discours s'appuie là encore sur un exemple donné.

*Activité*
*Soit le système (S)*

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 1/2 \end{cases}$$

*Exprimer y en fonction de x pour chaque équation. Que pensez-vous de l'ensemble des solutions du système (S') obtenu.*
*Quel est l'ensemble des solutions du système S''*

$$\left\{ \frac{1}{2}x \; \frac{1}{2} -= \frac{1}{2} - x \right.$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

*on a* $x - 2y = 1$ *sig* $2y = x - 1$ *sig* $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x + y =$ *sig* $y = -x + \frac{1}{2}$ *on obtient ainsi*

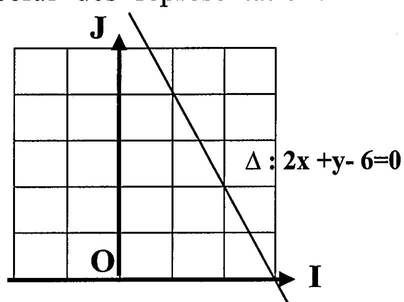
$$(S')\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

*Comme les équations sont équivalentes donc les deux systèmes ont le même ensemble de solutions.*
*En remplaçant y dans la première équation du système S'. On obtient le système S '' donc les trois systèmes ont le même ensemble de solutions, ils sont dits équivalents.*

## II.1.4 Un travail explicite autour de la résolution graphique

Les techniques graphiques sont introduites en prenant appui sur la représentation graphique des fonctions affines. Un discours explicite est tenu à ce sujet, toujours sur la base d'exemples qui donnent à voir différentes sous-tâches convoquées algébriques, numériques, graphiques : transformation d'écriture de l'équation donnée en équation réduite, proposer deux couples de nombres solutions, tracer la droite à partir des coordonnées de deux points.

Sur cet exemple, on voit d'abord l'expression de y en fonction de x : technique déjà amorcée auparavant. La nouvelle écriture renvoie à l'expression algébrique d'une fonction affine d'où le passage du registre algébrique à celui des représentations graphiques :




*Soit l'équation* $2x + y = 6$
*On a* $y = 6 - 2x$, *soit* $f : x \longrightarrow -2x + 6$ *: f est une fonction affine ,*
*Soit* $\Delta$ *sa représentation graphique*

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *1* |
| *y* | *6* | *4* |

*On place les points A(0,6) et B(1,4)*
*Soit C un point de* $\Delta$ *, C(2,2) alors on a* $2 \times 2 + y = 6$ *donc C est une solution de l'équation ainsi les coordonnées de chaque point de la droite est solution de l'équation*
*Savoir :*
*La représentation graphique de l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues est une droite.*

Tout comme pour les cahiers précédents et de façon conforme au manuel « contemporain », cette technique graphique reste l'occasion d'un traitement des cas particuliers de systèmes qui n'admettent pas de solutions ou à l'inverse ceux qui possèdent une infinité de solutions. La visualisation graphique permettant cette fois d'illustrer ces différents cas d'ensembles de solutions sans qu'ils soient formalisés (contrairement à ce que l'on a pu constater dans les cahiers et manuels typiques des périodes précédentes).

Soit un système de deux équations à deux inconnues de la forme
$$\begin{cases} y = a\,x + b \\ y' = a'\,x + b' \end{cases}$$
On note S l'ensemble des solutions dans IR × IR
Dans un repère (o, i, j), on désigne par (D1) et (D2) les droites représentant respectivement les ensembles solutions des équations y = a x+ b et y = a' x+ b'

| $a \neq a'$ | $a = a'$ | |
|---|---|---|
| (D1) et (D2) sont sécantes en $A(x_A, y_A)$ | $b = b'$<br>$(D_1) = (D_2)$ | $b \neq b'$<br>$(D_1) \cap (D_2) = \emptyset$ |
| Le système admet une solution unique. | Le système admet une infinité de solutions. | Le système n'admet pas de solutions. |

Le travail de la technique graphique se fait également dans un contexte de résolution d'un problème concret, puisqu'on relève à la suite de l'institutionnalisation de cette technique, la présence d'un énoncé extrait du manuel contemporain, à mettre en équation, puis à « résoudre graphiquement ».

*Exercice*
*L'aire d'un rectangle de périmètre 36m ne change pas si on diminue sa longueur de 4m et on augmente sa largeur de 3m.*

1) *Trouvez les dimensions du rectangle graphiquement*
2) *Calculer l'aire du rectangle*

### II.1.5 Un unique point de rapprochement explicite avec la période moderne : une importance nouvelle donnée aux fonctions dans le thème d'étude système d'équations

Le cahier de *Ramzi* paraît pour tous les points évoqués ci-dessus, conforme à la période contemporaine, s'appuyant d'ailleurs visiblement sur le manuel de cette époque. On observe toutefois un unique point de rapprochement avec la période moderne. Un accent est mis sur les liens entre équations et fonctions dans les activités prescrites aux élèves, alors que dans le manuel contemporain, cet aspect reste relégué dans la partie cours, dans le discours de l'enseignant. Les trois énoncés présentés dans un contexte intra mathématiques font intervenir des connaissances autours des fonctions affines en articulant les registres algébrique et graphique :

*3) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $2x + y = 3$*
*complétez $S = \{(x, ...), x \in IR\}$*
*4) Soit $f: IR \to IR$*
$x \to -2x + 3$
*Tracez dans le même repère (o,i,j) la représentation graphique D de f*
*Que remarquez-vous ?*

*On considère les fonctions*

$f: IR \to IR$ $\quad$ $g: IR \to IR$ $\quad$ $h: IR \to IR$
$x \to 2x+1$ $\quad$ $x \to x+4$ $\quad$ $x \to x+1$

*Soient D et D' et D'' les représentations graphiques respectives de f, g et h dans un repère orthonormé (O, OI, OJ)*

1) *Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D et D'.*
2) *montrer que D et D'' sont parallèles.*
3) *Déduire que D' et D'' sont sécantes.*

*5) Exercice*
*a) Déterminer la fonction affine f telle que $f(4) = -2$ et $f(0) = 6$.*

*b) tracer la représentation graphique de la fonction affine f.*
*c) Soit g la fonction affine telle qu g(x) = 1/2x +1.*
** Tracer la droite D représentation graphique de g.*
** Montrer que le point C (-4,-1) appartient à la droite D et placer le point C.*
*d) Résoudre par le calcul le système*

$$\begin{cases} y = 1/2x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

*Expliquer comment on peut retrouver graphiquement le résultat.*

On constate, dans le premier exemple le souci de représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues en passant par les fonctions. Dans ce cas le graphique sert à illustrer et à visualiser l'infinité des couples solutions d'une telle équation. Dans le second exemple, il s'agit du travail inverse puisqu'on passe d'une représentation de courbes représentatives de fonctions affines à une preuve algébrique des interprétations graphiques. Finalement l'organisation mathématique étudiée favorise une reprise des connaissances autour des fonctions affines à la fois dans un contexte algébrique (détermination de l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux nombres) et dans un contexte graphique (représentation graphique de fonctions affines) et leur lien avec les systèmes d'équations (résolution algébrique et lecture graphique).

En résumé, on peut dire que les praxéologies mathématiques enseignées données à voir dans le cahier de Ramzi paraissent conformes à celles prescrites pendant la période contemporaine : on constate d'ailleurs une reprise systématique des activités du manuel de l'époque, une organisation de l'étude quasi-similaire à celle proposée (qui semble placer l'élève plus au cœur de l'activité d'enseignement, même si cela reste difficile à confirmer sur la seule base du cahier). Seul un intérêt particulier accordé à l'articulation entre les objets équations et fonctions semble rapprocher le contenu de ce cahier d'une deuxième organisation mathématique de référence : celle de la période moderne.

# III .Des références aux organisations mathématiques de la période moderne avec des résidus d'anciennes réformes

## III.1 Les cahiers de Fatma et de Imed

Les organisations mathématiques développées dans les cahiers de *Fatma* et de *Imed*, présentent des points communs qui renvoient à des praxéologies de la période

« moderne ». Notamment, les contenus des chapitres enseignés montrent un étiquetage et un découpage des sujets et des thèmes d'étude, similaires à ceux préconisés par le manuel officiel. L'organisation du cours s'appuie essentiellement sur des activités de découverte en rapport avec les thèmes étudiés, des définitions qui apparaissent conformes à celles suggérées par le manuel. Mais nous relevons au fil des activités traitées certaines caractéristiques qui renvoient à des périodes d'enseignements passées.

### III.1 .1 Une étude peu explicite de la mise en équation

Nous avons pu observer à travers l'analyse des manuels, que les activités de découvertes mettent en avant deux organisations mathématiques principales toujours imbriquées au sein du domaine considéré : l'une autour de la mise en équation et l'autre autour de la résolution des équations et des systèmes d'équations. Que ce soit en vue d'introduire de nouveaux objets de savoir ou des techniques de résolution algébrique et graphique, ces activités sont toujours posées dans un contexte de résolution de problème mettant ainsi en jeu la technique de mise en équation. Si ces deux cahiers d'élèves révèlent la reprise de ces activités, les traces des tâches de mise en équation données à voir se limitent à l'écriture de l'équation ou du système d'équation qui modélise les situations évoquées. Les techniques mises à l'œuvre sont rendues « muettes » .La mise en équation de ces problèmes ne fait jamais l'objet d'une explicitation ou d'une justification technologique d'aucune sorte :

*Activité 1*
1) $x+y = 6$
...
2) $x+y =10$
Activité 2
*Activité 4*
*Activité 4 p229*
*Mise en équations*
*$3N = R-3$*
*$4N = R+4$*
*C'est un Systèmes de deux équations à deux inconnues,*

Si cette absence d'explicitation des techniques mises en jeu parait parfois conforme aux attentes des auteurs du manuel, notamment dans des situations où le travail de mise en équation est partiellement pris en charge par l'énoncé, ou fait intervenir des connaissances « naturalisées » chez les élèves de 1[ère] année (choix et désignation des inconnues, traduction conforme à l'équation...), elle s'éloigne des objectifs visés pour des contextes qui requièrent un travail plus approfondi de la technique et une explicitation des sous tâches en jeu . Les activités 2 et 3 du manuel qui renvoient à des techniques de conversion non évidentes (l'équation parait d'ailleurs plus complexe que les précédentes), les techniques de mises en équations ne sont pas pour autant rendues plus visibles :

*Activité 2*
*1) x cassettes, y CD*
*2,500 x + 15 y = 100....*
*Activité 3*
*1) 1/3(m - n) = (m + n )*

### III.1.2 Des objets de savoirs introduits dans un contexte plus algébrique que prévu

Dans ces deux cahiers, les organisations mathématiques enseignées autour de la résolution d'équations s'appuient toujours sur les activités prévues par le manuel officiel.

Mais elles paraissent parfois « détournées » de leur enjeu premier. Ainsi, les directives officielles visent l'introduction officielle de l'objet de savoir « équation à deux inconnues » dans un contexte numérique, afin de permettre une dialectique des stratégies arithmético-numérique et des techniques algébriques. Mais les praxéologies mises en place semblent davantage installer d'emblée les objets de savoir algébrique sans permettre cette dialectique. Ainsi dans l'activité 1 du manuel autour de l'équation à deux inconnues, les notions de couple de valeurs numériques et d'ensemble de solutions d'une équation à deux inconnues, sont présentées sous un aspect plus formel que ce qui est suggéré par le manuel :

*(Dans le cahier de Fatma)*

*Activité 1*
*1)a)Résoudre dans $IR^2$ l'équation suivante : $x + y = 6$*
*$x + y = 6$ sig $x = 6-y$ donc $S_{IR}{}^2 = \{ (6-y, y) \, y \in IR\}$*
*(Dans le cahier de Imed)*

*Activité 1*
*1) Les couples qui vérifient $x + y = 6$*
*$IR^2 = \{(x,y) , x \in IR , y \in IR \}$*
*$S_{IR}{}^2 = \{(x,y) , x \in IR$ et $x+ y = 6\}$*
*$y = 6 - x$*
*$S_{IR}{}^2 = \{(x \; 6 - x,), x \in IR\}$.*

Le contenu du cahier de *Fatma* montre pour sa part, plutôt une concurrence des méthodes de résolutions impliquant deux outils algébriques : les équations à une inconnue et celles à deux inconnues.

*L'équation $a\,x + by + c = 0$ ou a et b sont deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues est appelé équation du premier degré à deux inconnues. Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x,y) pour lesquels l'égalité est vraie. Chaque couple est appelé solution de l'équation*
*$a\,x + by + c = 0$.*
*$a \neq 0$, $b = 0$ : $a\,x + 0y + c = 0$*
*$a = 0$, $b \# 0$ : $0x + by + c = 0$*

| | |
|---|---|
| *1/Résoudre dans IR l'équation suivante* | *Résoudre dans $IR^2$ l'équation suivante* |
| $2x - 3 = 0$ | $2x - 3 = 0$ |
| $x = 3/2$ | $2x + 0y - 3 = 0$ |
| $S_{IR} = \{3/2\}$ | $x = 3/2$ |
| | $(3/2,0), (3/2,-1). (3/2,\Pi)...$ |
| | $S_{IR}{}^2 = \{(3/2, y)$ avec $y \in IR\}$ |

Dans le cahier d'*Imed* l'accent est davantage mis sur le fonctionnement de la notion de couple de nombre en tant que solution d'une équation à deux inconnues. Ainsi, l'activité 1 est suivie d'exemples dont le principal type de tâche est « connaissant la valeur numérique d'une partie du couple, trouver la deuxième, sachant que le couple est solution d'une équation donnée »

*2/Calculer a et b sachant que (a, -3) ; (2/3, b) sont solutions de $x + y = 6$*
*(a, -3) solution donc $1 \times a + (-3) = 6$ donc $a = 9$*
*(2/3, b) solution donc $2/3 + b = 6$ donc $b = 6 - 2/3 = 16/3$ donc (2/3 ; 16/3) est solution de l'équation.*
*3/Calculer m pou que (m,n) soit solution de l'équation $x + y = 6$, $m \in IR$*
$m + m = 6$
$2m = 6$
$m = 3$
$(3,3) \in S_{IR}{}^2$

Toujours dans le cahier de *Imed*, les organisations mathématiques développées autour des systèmes d'équations prennent systématiquement pied dans le registre algébrique. Alors que l'élève est censé adopter une stratégie de type numérique d'essais-erreurs ou par tâtonnement pour résoudre le système trouvé, il semble contraint à mettre en œuvre des techniques de résolution algébriques qui ne sont pourtant pas encore introduite à ce moment de l'étude.

A titre d'exemple, le système modélisant la situation évoquée par l'activité 4 du manuel est résolu par la technique « d'égalisation » dont l'étude n'est d'ailleurs jamais suggérée par le manuel.

$$\begin{cases} 3N = R - 3 \\ 4N = R + 4 \end{cases}$$
*est un Systèmes de deux équations à deux inconnues, résoudre ce système c'est chercher s'il existe le couple solution*
$R = 3N + 3$
$R = 4N - 4$
donc $3N + 3 = 4N - 4$
$3N - 4N = -3 - 4$
$-N = -7$
$N = 7$
donc $R = 3 \times 7 + 3 = 21 + 3 = 24$

## III.1.3 Des techniques algébriques peu explicitées

Dans les cahiers de *Fatma* et d'*Imed*, les techniques de résolution par substitution et par élimination sont présentées en s'appuyant sur les activités 5 et 6 du manuel. On peut voir comme pour le travail préalable de mise en équations des techniques de résolutions qui sont non seulement rendues “muettes” mais ne tiennent pas compte d'une équivalence logique entre les transformations des écritures algébriques:

*Activité 5 p229*

$$\begin{cases} m + n = 96 \\ 2(m+78) = n+78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ 2(96-n+78) = n + 78 \end{cases}$$

$192 - 2n + 156 = n + 78$

$-3n = -270$

$n = 90$

$m = 6$

*$(m,n) = (6,90)$ est solution de ce système.*

*Cette méthode de résolution est appelée Méthode par substitution*

*Activité 6 p229*

$$(-2)\times \begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x - 4y = -6600 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$$

$(1) + (2)\ -7x = -4200$

*Donc* $x = 600$

$5\times 600 + 2y = 3300$

$3000 + 2y = 3300$

$$y = \frac{3300-3000}{2}$$

$y = 150$

$(x,y) = (600,150)$

Le travail de ces techniques est réalisé sur des exemples, on retrouve deux systèmes dans le cahier de *Fatma* qui admettent une solution unique, un pour chaque technique et 5 exemples dans celui de *Imed* dont deux faisant appel aux cas particuliers d'ensembles de solutions. Dans le cas d'une infinité de solution, l'ensemble est représenté avec le formalisme trouvé dans les cahiers typiques réforme ou contre-réforme.

*Cas particuliers*

$$(-2)\times \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$y = \frac{5-2x}{3}$$

$$S_{IR^2} = \{(x, \frac{5-2x}{3}), x \in IR\}$$

$5x - y = 3$

$$-\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y = 8$$

$5x - y = 3$

$-5x + y = 16$

$0x + 0y = 19$

$S_{IR^2} = \emptyset$

$\{-2a + b = 12$

$-3a - 4b = 7$

*{-8a +4b = 48*
*-3a-4b = 7*
*-11a = 55*
*a = -55/11*
*a = -5*
*b = 12-10*
*b= 2*
*(a,b) = (-5,2).*

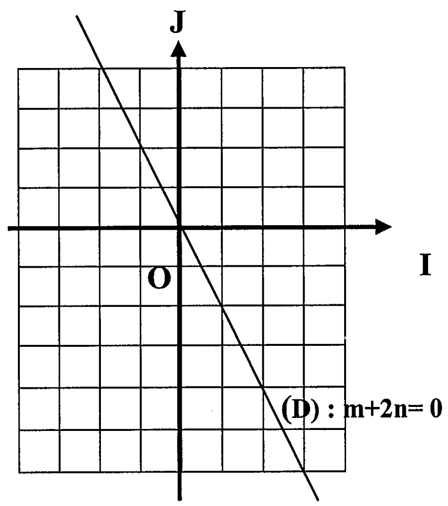
### III.1.4 Des techniques graphiques qui ne s'appuient pas sur le registre fonctionnel

L'étude du type de tâche résolution graphique d'une équation à deux inconnues est abordée différemment dans les deux cahiers, et ce bien qu'elle s'appuie sur la même activité du manuel. Ainsi dans le cahier *de Imed,* ce type de tâche est réalisé avec une technique muette. Le formalisme algébrique donné à l'ensemble des couples solutions d'une telle équation est immédiatement suivi de la représentation, comme si le graphique était présent pour illustrer ou visualiser l'infinité des couples solutions. La technique graphique est ainsi présentée sur la base d'exemples sans commentaires particulier et sans référence apparente à la représentation graphique d'une fonction affine comme l'illustre cet extrait : m +n = (m-n) /3

3m +3n = m –n
2m +4n= 0
m+2n = 0
m = -2n

| | | | |
|---|---|---|---|
| *n* | *1* | *3* | *5* |
| *m* | *-2* | *-6* | *-10* |

(m,n) ∈ *{(-4,2), (-6,3)...*
$S_{IR}{}^{2}$ *= {(m, n) tel que m = -2n et n ∈ IR}*




Dans le cahier de *Fatma*, l'alignement des points constaté sur le graphique du cahier **de** *Imed* est accompagné d'une preuve qui met en avant des outils de la géométrie analytique tels que les notions de vecteurs et de colinéarité. Ce n'est qu'à la suite de ce commentaire technologique autour de la résolution graphique qu'on généralise le résultat. S'ensuit le traitement des cas particuliers de droites (parallèles aux axes du repère). L'interprétation graphique est dès lors associée à la résolution algébrique de ce type d'équations.

*Activité3*
*La représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation m + 2n = 0 dans un repère du plan est une droite*
*Démontrons que les trois points A(1,-2) ; B(3,-6) et C(5,-10) sont alignés*

$\overrightarrow{AB} = (2, -4)$ et $\overrightarrow{AC} = (4,-8)$

$\frac{x_C - x_a}{x_B - x_A} = 4/2 = 2$

$\frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = -8/-4 = 2$

$\overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{AB}$ *les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.*
*Retenons (o,i,j) est un repère cartésien du plan.*
*La représentation graphique des solutions de l'équation a x +by +c = 0 est une droite.*
*cas particulier*
*1/ si a = 0 et b ≠ 0 0x +by +c = 0 donc y = -c/b la droite est parallèle à l'axe des abscisses.*
*donc* $S_{IR}{}^2 = \{ (x,-c/b) ,$ *tel que* $x \in IR, \}$
*2/ si a ≠ 0 et b = 0 a x +0y +c = 0 donc x = -c/a la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.*
*donc* $S_{IR}{}^2 = \{(-c/a, y) ,$ *tel que* $y \in IR\}$ .

Soulignons au passage, que les organisations mathématiques étudiées dans le cahier de *Imed* autour de la résolution graphique des équations sont développées de la même manière pour les systèmes d'équations. Au sein des deux cahiers, l'accent est particulièrement mis sur l'étude des cas particuliers de systèmes qui correspondent aux positions relatives des droites dans le plan. Au final, en ce qui concerne la résolution graphique, les contenus de ces cahiers paraissent assez éloignés des organisations mathématiques à enseigner du manuel : le lien avec le registre fonctionnel n'étant jamais apparent.

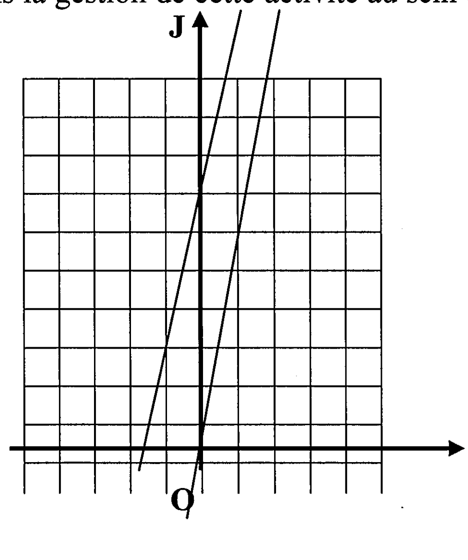
Pourtant, une activité trouvée dans le cahier de Fatma s'appuie sur l'activité 11 du manuel qui met en avant une articulation des registres algébrique et graphique en passant par les fonctions. On voit d'ailleurs, apparaître l'équation réduite de la droite (y = ax +b à la place de l'écriture suggérée p(x) = ax +b) suivie d'un tableau de valeurs et de la représentation graphique, mais toujours sans explicitation particulière.

D'ailleurs, le point d'intersection des tracés de droites tracées se positionne en dehors de la feuille et on ne voit pas comment l'abscisse du point d'intersection a pu être trouvée si le graphique accompli au tableau est semblable à celui du cahier de *Fatma* : ce qui suggère une maladresse enseignante dans la gestion de cette activité au sein de la classe.

*Activité 11*
*1ère option : y = 5x*
*2ème option, y = 3x +28*

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *4* |
| *y* | *28* | *40* |

*Les deux options sont équivalentes lorsque x = 14*
*Si x < 14 option 1 avantageuse*
*Si x > 14 option 2 avantageuse*



En résumé, les organisations mathématiques données à voire dans ces deux cahiers, présentent des différences sensibles avec les organisations mathématiques à enseigner suggérées par le manuel, tout en se basant pourtant sur les mêmes activités. Nous pouvons souligner, le faible intérêt accordé au travail de mise en équation qui semble plus subsister en tant qu'étape à franchir pour aller vers la résolution algébrique. Celle-ci paraît toujours d'emblée envisagée en faisant l'impasse sur les techniques arithmético-numériques qui pourraient pourtant émerger des énoncés d'activité proposés. Ceci pourrait laisser croire que les techniques algébriques enseignées sont des techniques fortes et assez riches au niveau des tâches proposées. Mais en observant de plus près le travail de ces techniques sur des tâches isolées, nous avions constaté une pauvreté du travail algébrique et un déficit technologico-théorique autour de la résolution algébrique. Pourtant le formalisme caractéristique des périodes antérieures persiste à être présent à tous les niveaux des organisations mathématiques .En ce qui concerne le travail autour de la résolution graphique, des résidus d'anciennes réformes continuent à se greffer aux organisations mathématiques enseignées éloignant encore plus les praxéologies enseignées de celles qui semblent être visées par les auteurs du manuel officiel de la période « moderne ».

Ces résidus seront plus imperceptibles dans le cahier de *Siwar* qui des dix cahiers d'élèves d'enseignants expérimentés semble le plus en conformité avec les organisations mathématiques et didactiques suggérées par le nouveau manuel.

# IV. Des références aux organisations mathématiques de la période moderne

## IV.1 Le cahier de *Siwar*

A l'opposé de ce qu'on a pu constater dans les cahiers étudiés, le cahier de *Siwar* montre des organisations mathématiques très proches de celles développées par les auteurs du manuel de la période « moderne ». La partie identifiable à un cours s'appuie exclusivement sur des activités du manuel, elle montre le même découpage et étiquetage des sujets d'étude ainsi qu'une reprise des institutionnalisations suggérées.

### IV.1.1 La mise en équation présente au fil des activités

L'étude du type de tâches : mise en équation est permanant à travers les activités qui constituent la partie identifiable à un cours, elle est souvent accompagnée du découpage générique de la technique en sous tâches : « choix des inconnues », « mise en « équation(s) » et « résolution de l'équation ou du système d'équations ». On relève les trois activités du manuel relatives au sujet d'étude « équations du premier degré à deux inconnues », 4 activités sur 7 autour des systèmes d'équations et une activité sur 3 liée au type de tâche « Utiliser un graphique pour connaître les solutions éventuelles d'un système ».

On relève toutefois rarement un commentaire, qui fait apparaître l'étape de mise en équation comme une traduction de l'énoncé. L'équation ou le système qui modélise la situation évoquée par l'activité est posé d'emblée.

***Activité 2 :***
*Choix des inconnues :*
*On désigne par x le nombre de cassettes*
*On désigne par y le nombre de CD*
*Mise en équation : Sachant que le prix d'une cassette est égale à 2,500D et le prix d'un CD est 15D*
*2,500x + 15y = 100*
***Activité 3 :***
*1) 1/3(m-n) = m+n*

Le contenu de ce cahier renvoie exclusivement à la réalisation d'activités tirées du manuel.

Toutefois, le choix des énoncés reste limité à des situations assez « classiques », proches de ceux proposés pendant la période contemporaine : d'abord des problèmes concrets qui sont généralement destinés à introduire des objets de savoir , ensuite quelques énoncés « traditionnels » (problèmes d'âge, de partage, ...) qui apparaissent plutôt à titre d'application. Nous n'avons relevé aucun problème qui pourrait faire appel à d'autres disciplines comme la physique, l'informatique, l'économie, pourtant préconisés dans les organisations mathématiques à enseigner. Ainsi sur les quatre activités du manuel officiel, seul l'activité 9 fait l'objet d'étude:

***Activité** 7 :Un pharmacien dispose de deux solutions S1 et S2, d'alcool iodé à 20% et à 8%, il veut mélanger une certaine quantité de S1 avec une certaine quantité de S2 de façon à obtenir une troisième solution d'alcool iodé à 15% et de volume un litre. On désigne par x et y les quantités (en litres) de chacune des solutions S1 et S2 nécessaires à la fabrication du mélange.*

1- *Mettre le problème en équations*
2- *Déterminer les quantités (en litres) de chacune des solutions S1 et S2 nécessaires à la fabrication du mélange.*

***Activité 8** :1- Peut-on construire un rectangle vérifiant les deux conditions suivantes :*
** Son périmètre est égal à 24 cm.*
** Si on augmente sa largeur de 2cm et on diminue sa longueur de 3cm son aire ne change pas.*
*2- Peut-on construire un rectangle vérifiant les deux conditions suivantes :*
** Son périmètre est égal à 24 cm.*

** Si on augmente sa largeur de 1cm et on diminue sa longueur de 3cm son aire ne change pas.*
***Activité 9** : Un grand père décide de partager la somme de 800 dinars entre ses deux fils proportionnellement au nombre de leurs enfants respectifs. On sait que le fils aîné a trois enfants et le fils cadet a deux enfants.*

1- *Mettre le problème en équations.*
2- *Déterminer la somme d'argent que reçoit chacun des fils .*

***Activité 10** :Peut-on trouver deux nombres dont la différence est égale à 1 et tels que si on ajoute 2 à l'un et l'on retranche 2 à l'autre leur produit ne change pas ?*

### IV.1.2 Des objets de savoirs « naturalisés » introduits au travers des activités

L'objet de savoir « équation à deux inconnues » est défini à la suite des trois activités suggérées. Dans la première activité, on voit apparaître la notion de couple solution d'une équation comme réponse au type de tâche « Dénombrer tous les couples (x,y) qui vérifient la relation x +y = 6, sachant que x et y sont deux entiers compris entre 1 et 6 ». Les réponses données à voir sont réduites à une exécution des consignes. Dans la troisième activité on retrouve une reprise de la consigne sans commentaires proposant des couples de nombres solution de l'équation trouvée. La notion de couple de nombre, parait de ce fait naturalisée tant au niveau de l'organisation mathématique étudiée que celle à enseigner.

***Activité 1** :*
*1- La relation entre x et y est définie par x + y = 6.*
*Les couples (x,y) : (2,4), (1,5), (3,3) ; (5,1) (4,2)*
*2-La relation x +y = 10*
*Les couples (5,5), (4,6), (6,4)*
*x+y= 10 est une équation du premier degré à deux inconnues x et y.*
*Activité3*
*2/ Donner cinq couples (m,n) vérifiant m+2n = 0*
*(-2,1) ; (14,-7), (-6,3), (-8,4), (-4,2)*

La solution éventuelle d'un système d'équation est manipulée selon la même approche au travers de l'activité 4. La recherche des valeurs de N et R conduit directement à l'écriture du couple solution comme une solution commune aux deux équations formant le système. Il s'ensuit le moment d'institutionnalisation suggéré par le manuel et que l'on retrouve avec une formulation fidèle à celle de l'ouvrage :

*N = 7*
*(R, N) = (24,7) vérifie à la fois l'équation 1 et 2.*
*Un système d'équation du premier degré à deux inconnues est la donnée de deux équations*
*ax +by +c = 0*
*a'x +b'y +c' = 0*
*Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues c'est trouver les couples (x,y) vérifiant les équations 1 et 2 à la fois.*

### IV.1.3 Des techniques de résolution fidèles aux consignes

Contrairement aux cahiers précédents, et conformément au manuel officiel le type de tâche « résoudre une équation du premier degré à deux inconnue » fait l'objet d'une étude qui semble effectivement prendre pied dans le contexte numérique. Au fil des activités, nous percevons des techniques de résolutions d'équation à une inconnue ou un travail de transformation des écritures algébriques pour ramener l'équation trouvée après mise en équation à la forme canonique. La technique algébrique n'est pas prononcée et le formalisme algébrique retrouvé dans les autres cahiers n'apparaît pas au niveau des organisations mathématiques étudiées :

*1/3(m-n) = m +n*
*1/3(m-n) –( m +n) = 0*
*1/3m- 1/3n –m –n = 0*
*m/3- 3m/3 –n/3 –3n/3 = 0*
*-2m/3 – 4n/3 = 0*
*2m+4n = 0*
*m +2n = 0*
*Si m = -2 on obtient -2 +2n = 0 donc n = 1.*

Les techniques de résolution algébrique des systèmes d'équations par substitution et par élimination font l'objet d'une étude et d'une explicitation à travers des exemples, tous à solution unique.

Au terme de chaque technique, on voit toutefois apparaître l'ensemble de solutions dans $IR^2$ :

*a) Méthode par substitution*
*On exprime une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des équations.*
*On remplace dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée et on résout l'équation à une inconnue.*

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ 3(y + 5) = 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 15 + 2y = 6 \\ 3y + 2y = 6 - 15 \\ 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -9/5 \\ x = -9/5 + 25/5 = 16/5 \end{cases}$$

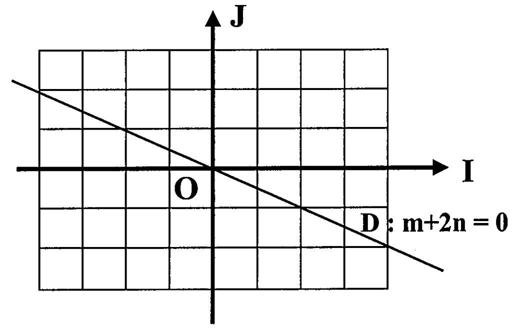
$S_{IR^2} = \{(16/5, -9/5)\}$

Le travail de ces techniques se fait au travers d'exemples, on relève en tout 8 exemples dont le système qui modélise la situation évoquée par l'activité 9 du manuel cité ci-dessus.

### IV.1.4 Une technique graphique « muette »

L'étude du type de tâche résolution graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues est abordée à partir de l'activité 3 du manuel. La technique mise en œuvre est réduite à une reprise des consignes sans arrière plan technologique qui accompagne le constat d'alignement des points.

*a1) Donner cinq couples (m, n) vérifiant m+2n = 0*
*(-2,1)(14,-7), (-6,3) (-8,4), (-4,2)*




b) Placer les points de coordonnées (m, n) dans un plan muni d'un repère cartésien (o, i, j) .Que remarque-t-on ?
On remarque que les points sont alignés.

Tout comme dans le manuel, on voit apparaître des techniques explicites autour de la résolution algébrique des systèmes d'équations : par substitution et par élimination, à l'exception du fait qu'elles sont accompagnées de l'ostensif $S_{IR}^2$ en fin de chaque résolution.

***En résumé : des organisations mathématiques calquées sur celles de référence, comportant seulement quelques points de « non-conformité avec la réforme de la « période moderne »***

Les organisations mathématiques et didactiques développées dans ce cahier semblent suivre fidèlement celles suggérées par le manuel : la mise en équation est omniprésente au fil des activités étudiées ; les techniques algébriques qui semblent prendre pied sur des stratégies arithmético-numériques sont présentées par ostension sur des cas simples ; la technique graphique est abordée en lien avec le registre fonctionnel.

Seules deux dimensions de la réforme d'ailleurs non spécifiques aux thèmes étudiés ne semblent pas prises en considération :

- La dimension transdisciplinaire : en effet toutes les activités choisies font appel à des problèmes modèles, (classiques) concrets ou numériques, pourtant certaines situations proposées dans le manuel mettent en jeu des domaines d'expériences assez diversifiés (physique, pourcentage, chimie…)
- La dimension utilisation des nouvelles technologies certes encore faiblement présente dans le manuel mais totalement absente du cahier de *Siwar*.

Par ailleurs, le contenu de ce cahier semble vraiment en tout point similaire à l'organisation de l'étude suggérée par le manuel.

Seule la présence d'un ostensif symbolique renvoyant à l'ensemble de solutions d'un système d'équations, apparaît comme un résidu des périodes d'enseignement précédentes : sans que l'on sache d'ailleurs trop comment celui-ci est introduit.

# V. Conclusions

L'analyse des organisations mathématiques en rapport avec les thèmes d'étude « équations » et « systèmes d'équations » réalisées sur les cahiers d'élèves a permis de renseigner jusqu'à une certaine mesure l'impact des réformes successives sur les pratiques d'enseignants expérimentés.

Cette analyse nous permet de mettre en évidence une forte présence d'organisations mathématiques et didactiques de référence liées à des périodes d'enseignements passées : réforme, contre réforme. Six cahiers sur les dix retenus montrent un rapport à l'algèbre qui s'organise essentiellement autour de la dimension « objet » et qui reste enfermé dans l'utilisation de techniques algébriques « algorithmisées » accompagnées d'un discours théorique plus ou moins important. Les techniques mises à l'œuvre autour de la résolution des équations, sont souvent accompagnées d'une théorisation, d'un formalisme algébrique et d'une technologique en rapport avec la notion d'équivalence. Les techniques graphiques servent souvent à illustrer travail algébrique dominant au sein du domaine d'étude, en se basant sur une démarche de pointage. Exception faite du cahier de *Meriam* qui révèle des organisations mathématiques plus proches de la « contre réforme », le travail graphique parait au centre des organisations mathématique, ce qui peut constituer un point de rapprochement de la période moderne. Mais les praxéologies développées à ce sujet prennent davantage appui sur le cadre géométrique que le registre fonctionnel, ce qui l'éloigne des tendances actuelles.

Dans ces 6 cahiers, l'absence d'un travail autour de la mise en équation est manifeste, ce qui accentue la distanciation par rapport aux organisations préconisées. Ces spécificités du travail algébrique mis à l'œuvre dans ces cahiers pointent une forme de stabilité des organisations qui rejoint les propos de Assude ' *« ce n'est pas parce que les programmes changent que les pratiques changent » (Assude, 2004, p325).*

L'analyse du cahier de *Ramzi* révèle des praxéologies mathématiques et didactiques, qui paraissent plutôt fidèles aux praxéologies de référence de la « réforme contemporaine » (exception fait du lien renforcé entre registres fonctionnel et algébrique qui semble davantage typique de la « réforme moderne »).Les pratiques enseignantes correspondantes auraient fait l'objet d'adaptations importantes à l'occasion de la réforme précédente, mais ne franchiraient pas vraiment le cap des changements prescrits par la réforme actuelle.

Quant aux cahiers de *Fatma* et *de Imed*, si leur contenu renvoie presque toujours explicitement aux activités du nouveau manuel, les organisations didactiques et mathématiques enseignées restent toutefois décalées par rapport aux attentes institutionnelles. Notre analyse pointe des résidus importants d'anciennes réformes qui détournent les enjeux des activités mises en œuvre : l'introduction des outils algébriques paraissant rarement problématisée au fil des dialectiques avec les registres numérique et fonctionnel, suggérés par les directives officielles.

Finalement, seul le cahier de *Siwar* semble en relative conformité avec l'organisation de l'étude prévue dans le manuel officiel : même si les activités choisies reposent sur des énoncés plutôt « classiques » (négligeant les entrées interdisciplinaires et d'utilisation des TICE, pourtant présentes dans le manuel) et si on entrevoit ici ou là quelques résidus symboliques plutôt typiques des anciennes réformes. Toutefois cette « fidélité apparente » aux organisations mathématiques et didactiques de référence pour la réforme moderne reste difficile à confirmer sur la seule base de l'étude d'un cahier : cette étude ne permet pas d'approcher la gestion didactique qui accompagne les activités ou tâches mises en œuvre. C'est pourquoi une entrée dans l'intimité des pratiques de classe correspondantes nous a paru particulièrement intéressante pour percevoir ce a vraiment fait ou non l'objet d'adaptations des pratiques enseignantes à la suite de la réforme moderne. L'objet des tableaux suivants est d'en avoir une vue synthétique :

| **Cahiers retenus pour l'analyse des pratiques enseignantes** | **Principaux critères retenus pour la description des organisations mathématiques et didactiques développées aux objets « équations du premier degré à deux inconnues » et « systèmes d'équations. »** | ***Référence aux différentes réformes d'enseignements*** |
|---|---|---|
| *Sara et Samia* | • Des objets de savoir et des techniques algébriques théorisés.<br>• Un travail quasi-exclusif et isolé des techniques algébriques.<br>• Une étude partielle de la technique graphique | ***Un intermédiaire entre Réforme et Contre-réforme*** |
| ***Sandra*** | • Un travail explicite autour de la technique graphique.<br>• Un travail de la technique graphique en lien avec la résolution algébrique.<br>• Une interrelation des techniques algébriques et graphiques dans la résolution des systèmes d'équations. | ***Une tendance davantage marquée Contre-réforme*** |
| ***Meriam*** | • Des objets de savoir introduits dans un contexte géométrique.<br>• Des techniques de résolution prenant appui sur le registre graphique.<br>• Un lien ténu entre équation de droite et courbe représentative d'une fonction affine.<br>• Des techniques algébriques présentées par ostension sur la base d'exemples.<br>• Une mise en équation qui a le statut de problèmes d'application. | ***Une tendance davantage marquée Contre-réforme*** |
| ***Ramzi*** | • La mise en équation : un enjeu d'enseignement.<br>• Des objets de savoir algébriques introduits en prenant appui sur le registre numérique.<br>• Des techniques algébriques introduites avec une dialectique ancien-nouveau.<br>• Un travail explicite autour de la résolution graphique.<br>• Une importance nouvelle donnée aux fonctions dans le thème d'étude système d'équations | ***Réforme « contemporaine »*** |
| ***Fatma et Imed*** | • Une étude peu explicite de la mise en équation.<br>• Des objets de savoir introduits dans un contexte plus algébrique que prévu.<br>• Des techniques algébriques peu explicitées.<br>• Des techniques graphiques qui ne s'appuient pas sur le registre fonctionnel. | ***Réforme « moderne » avec des résidus d'anciennes réformes.*** |
| ***Siwar*** | • Une mise en équation présente au fil des activités.<br>• Des objets de savoir « naturalisés » introduits au travers des activités du manuel.<br>• Des techniques de résolution fidèles aux consignes.<br>• Une technique graphique « muette ». | ***Réforme « moderne »*** |

# Chapitre C3. Analyse des pratiques de l'enseignante P1 : Evolution des pratiques autour des thèmes « Equations » et « Systèmes d'équations »

## Introduction

L'analyse que nous proposons des séances d'observation se déroule en deux phases : dans la première partie, nous menons une analyse *a priori* sur la base des activités du manuel choisies par l'enseignante. Dans une seconde phase, nous conduisons l'étude des pratiques effectives de P1 sur la base des transcriptions des séances d'observation sur deux années consécutives.

On peut déjà indiquer qu'une analyse *a priori* permettra de pointer certains enjeux de l'enseignement des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations et de déterminer certaines contraintes que la confrontation au réel permettra d'en préciser. Dans notre analyse, nous avions choisi de séparer l'étude des organisations mathématiques liées à la mise en équation, de celle liées à la résolution après avoir constitué notre corpus expérimental. En effet, l'analyse des cahiers d'élèves a été un premier indicateur de pratiques différenciée entre les enseignantes selon qu'il, s'agit de praxéologies liée à la mise en équation ou à la résolution. Un second indicateur a été celui des observations de classes menées pour P1, P2 puis P3 et qui révèlent des différences significatives des pratiques. Nous avions conduit ce travail de la manière suivante :

- Une analyse des enjeux de savoir qui sont visibles ou cachés dans les situations évoquées par les activités. Ceci permet de mettre l'accent sur les éléments de savoir d'un point de vue mathématique, institutionnel et du point de vue des apprentissages potentiels des élèves.
- Une analyse des techniques mathématiques possibles, en précisant la place de ces techniques dans les organisations développées, en référence notamment aux travaux d'Assude concernant les techniques invisibles, faibles ou fortes que les élèves peuvent mettre en œuvre.

➢ Une analyse de certains problèmes d'enseignement qui sont perçus ou pas par le professeur dans son appropriation du projet d'enseignement et qui peut expliquer certains phénomènes didactiques en rapport avec la gestion de ces activités.

# I. Analyse a priori des activités choisies par P1

## I.1 Autour du première thème : équations du premier degré à deux inconnues

Les équations du premier degré à deux inconnues sont introduites dans le manuel au travers de trois activités qui se rattachent à deux organisations mathématiques principales: une OM liée à la modélisation d'un problème par une équation du premier degré à deux inconnues (mise en équation) et une OM liée à la résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues. Un des points mis en avant dans le manuel et cohérent avec ce que nous venons de rappeler des programmes est l'étude simultanée de ces deux OM. Cependant, pour faciliter notre analyse, nous avons choisi de regarder les OM liées à la mise en équation et celles liées à la résolution des équations indépendamment l'une de l'autre.
Avant d'entrer dans l'analyse a priori, nous reprenons les énoncés des trois activités choisies par P1, pour construire son cours autour de ce premier thème d'étude.

*Activité 1*

Deux dés équilibrés ont leurs faces numérotées de 1 à 6, on lance les deux dés et on fait la somme des nombres obtenus, on désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face.
1-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 6 ?
  b) Dénombrer alors tous les couples (x, y).
2-a) Quelle relation doivent vérifier x et y si la somme obtenue est égale à 10 ?
  b) Dénombrer alors tous les couples (x, y).

Activité 2

Amine dépense 100 Dinars pour l'achat de cassettes et de CD. Le prix d'une cassette est de 2.500 dinars et celui d'un CD est 15 dinars.
1-Modéliser la situation par une équation.
2-On suppose que amine a acheté quatre cassettes, combien a-t-il acheté de CD ?
3-On suppose que le nombre de cassettes achetées et le double de celui des CD. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.
4-On suppose que le nombre de CD achetés est égal à une fois et demi celui des cassettes. Déterminer le nombre de cassettes et le nombre de CD achetés.

Activité 3

On se propose de trouver deux nombres m et n tels que le tiers de leurs différence est égal à leur somme.

1. Mettre le problème en équation.
2. Donner une valeur du couple (m, n) .
3. Le couple (3/5,11) répond-il au problème ?
4. On suppose que n = 3. Trouver m.
   a) Donner cinq couples (m, n) qui sont solutions du problème.
   b) Placer les points de coordonnées (m, n) dans le plan muni d'un repère (o,oi,oj). Que remarque-t-on ?

### I.1.1 Description et analyse des organisations praxéologiques autour de la mise en équation

***Analyse de l'activité 1***

Dans la première activité qui se présente sous la forme d'un problème concret, l'énoncé prend en charge la désignation des deux inconnues par les lettres x et y et il est demandé d'établir une relation entre ces inconnues de façon à ce que leur somme soit égale à 6 (puis 10). La mise en équation dans ce cas est très guidée, le passage du cadre arithmétique au cadre algébrique est pris en charge par l'énoncé : choix des inconnues, désignation des inconnues, explicitation de la relation. La technique requise pour accomplir ce type de tâche suppose une conversion simple d'une information stipulée dans l'énoncé en relation algébrique. Elle peut de ce fait être invisible si l'élève se contente d'apporter directement la relation sans explicitation, la situation concrète évoquée dans cette activité autorise d'ailleurs des résolutions simples de type arithmétique que nous analyserons par la suite. Cependant, la deuxième question, qui correspond à une nouvelle mise en équation avec les mêmes variables permet de rentrer plus en avant dans une problématique de modélisation car à priori ,l'élève doit prendre en considération la condition implicite ($1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$) correspondant aux contraintes de la situation concrète suggérée par l'énoncé. Les techniques peuvent être faibles si la relation est présentée sur la base d'une relecture de l'énoncé ou de la consigne.

***Analyse de l'activité 2***

La seconde activité s'appuie sur une situation concrète et familière pour l'élève, la formulation de la consigne « Modéliser la situation par une équation », qui convoque la mise en équation suppose qu'à présent l'objet de savoir « équation du premier degré à deux inconnues » est installé et institutionnalisé à la suite de la première activité.

Une technique forte repose sur le passage du cadre arithmétique au cadre algébrique : le choix des inconnues, la désignation par des lettres et la conversion de l'énoncé en une équation à deux inconnues ne sont cette fois, pas pris en charge par la consigne. De plus, le domaine numérique mis en jeu par la situation évoquée est moins trivial que dans l'activité précédente (les coefficients sont des nombres décimaux simples, les inconnues en jeu correspondent à des entiers) et l'équation à écrire est de forme plus complexe. De ce fait, par rapport à l'activité précédente, on constate que la situation est moins triviale, puisqu'une plus grande part du travail lié à la mise en équation relève du topos de l'élève. D'autre part, le type de tâches convoqué par les troisième et quatrième questions de l'énoncé suppose également un travail de mise en équation : l'élève est censé traduire les informations données (« le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD » et « le nombre de CD achetés est égal à une fois et demi celui des cassettes ») en relations algébriques, afin de pouvoir effectuer les substitutions attendues.

***<u>Analyse de l'activité 3</u>***

La troisième activité se présente comme un problème du cadre numérique. Le choix des inconnues et leur désignation (par des lettres $m$ et $n$) sont prises en charge par l'énoncé. Cependant, à la différence des activités précédentes, l'écriture de l'équation à partir de l'énoncé donné en langage naturel nous semble plus délicate et nécessite une technique forte ou de faible rigueur: traduire « le tiers de la différence de deux nombres est égale à la somme » en $1/3\ (m - n) = m+n$ ne paraît pas si évident pour des élèves de ce niveau d'une part à cause de la formulation en langage naturel employée, et d'autre part en raison de l'intervention d'une fraction, et de l'apparition des inconnues de part et d'autre de l'égalité au travers de la formulation de l'énoncé.

***<u>Analyse des problèmes d'enseignement</u>***

L'analyse des enjeux du savoir à enseigner, fait apparaître au fil des activités, certaines évolutions dans l'organisation mathématique développée autour de la mise en équation :

- Une dévolution progressive par l'élève, du travail de mise en équation, au niveau du choix des inconnues et de leur désignation ainsi qu'au niveau de l'écriture des relations algébriques. Il semble que l'un des problèmes auquel l'enseignant peut être confronté, est celui de mettre en avant des techniques fortes de manière à faire progresser le travail de traduction et d'écriture des relations et de faire distinguer les étapes de la mise en équation même si elles sont en partie prises en charge par les énoncés.

-Une complexification progressive de la forme des équations obtenue et du domaine numérique mis en jeu via les différents contextes ou situations sur lesquelles s'appuie le travail de mise en équation et l'on peut alors se demander si l'enseignante prendra en charge l'étude simultanée des organisations mathématiques autour de la mise en équation et de la résolution d'équation ; dans ce cas comment peut-elle dépasser le contexte numérique des situations évoquées pour donner du sens aux solutions algébriques d'une équation à deux inconnues ?

### I.1.2 Description et analyse des organisations praxéologiques autour de la résolution des équations à deux inconnues

***Analyse de l'activité 1***

L'objet « équation à deux inconnues » est invoqué dans la première question de l'activité 1 en tant que relation entre deux inconnues, le terme équation n'étant pas encore introduit. La résolution de $x+y = 6$ fait l'objet de la seconde question. Mais le contexte concret évoqué par l'activité rend la résolution du problème, accessible par des techniques numériques simples, qui peuvent être faibles ou fortes : les inconnues correspondent à des variables à valeur dans un sous ensemble fini de IN. L'élève peut très bien résoudre le problème posé sans passer par l'écriture algébrique, de manière arithmétique. On peut donc se poser la question : va-t-il utiliser l'équation écrite suite à la question précédente ? Si oui ce ne serait que parce que l'énoncé l'y invite fortement (injonction liée au contrat didactique) et on peut encore se poser la question de la technique employée à partir de cette équation : substitution de valeurs numériques ou transformation de l'écriture $x+y=6$ en $y = 6-x$ ou $x= 6-y$ ? Quoiqu'il en soit, la résolution du problème ou de l'équation se résume à des tests de valeurs numériques dans un ensemble très limité. On est loin de l'ensemble infini de solutions d'une équation à deux inconnues classique dans IR. Par ailleurs, on peut se demander le sens que va prendre au travers de cette résolution, l'ostensif couple de nombres mis en avant par l'énoncé. En effet, le problème tel qu'il est posé, implique que si un couple (x, y) est solution de l'équation, le couple (y, x) l'est aussi, tout en ne motivant pas vraiment la distinction entre ces deux couples symétriques de solutions : le contexte évoqué ne différenciant pas le rôle joué par les deux dés ou les deux lancers de dé.

En résumé, cette première activité qui installe le moment de la première rencontre avec l'objet équation à deux inconnues, nous parait sujette à controverse et présente des difficultés auxquelles le professeur est confronté. D'une part, on ne voit pas bien en quoi le problème posé motive vraiment l'utilisation de cet objet pour sa résolution : des résolutions numériques paraissant bien plus accessibles à ce niveau. D'autre part, les significations prises par le genre de tâches « résoudre une équation à deux inconnues », et l'ostensif « couple de nombres » qui accompagnent ce type de tâches risquent d'être limitées, voire erronées sans une décontextualisation appropriée. L'élève peut très bien penser que l'ensemble de solutions d'une équation à deux inconnues est toujours fini et ne pas accorder d'importance à la résolution algébrique ou graphique, ou encore ne pas distinguer les rôles respectifs des inconnues au sein d'un couple solution.

Dans ce contexte, au niveau de l'organisation didactique développée au sein du manuel, on voit mal comment articuler cette première activité avec le moment d'institutionnalisation autour de la résolution d'une équation à deux inconnues l'encadré suivant :

> *« L'équation a x +by +c = 0 ou a et b sont deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues, est appelée équation du premier degré à deux inconnues. Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vraie. Chaque couple est appelé solution de l'équation »*

Cette articulation suppose en effet, une extension du domaine de résolution et donc le passage de I N à IR et du fini à l'infini. La question de trouver tous les couples solution ne peut pas être résolue de manière identique d'autant plus que le manuel ne précise pas que ces couples doivent être obtenus par des techniques algébriques.

***<u>Analyse de l'activité 2</u>***

La seconde activité se modélise par une équation de la forme a x +by = c avec a,b et c décimaux, mais du fait du contexte posé, les solutions sont entières et de plus la relation proposée n'est plus symétrique. Le terme « équation » est à présent utilisé dans l'énoncé. La première question qui se rapporte au type de tâche : « Pour une équation à deux inconnues, trouver la valeur d'une inconnue (le nombre de CD) connaissant la valeur de l'autre » requière une technique forte qui implique un travail de substitution d'une valeur numérique dans l'équation pour déterminer la valeur de la deuxième inconnue, ce qui peut se faire ensuite de façon arithmétique.

Le second type de tâche évoqué dans la deuxième question peut être résolue par une technique forte qui consiste à substituer une expression littérale (le nombre de cassettes en fonction du nombre de CD) dans l'équation à deux inconnues pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Ceci pouvant être résolue avec des connaissances relatives à sa résolution algébrique, supposées mobilisables par les élèves et même disponibles à ce niveau. La troisième question de l'activité réfère au même type de tâche avec une inversion des rôles des deux inconnues (le nombre des CD est fonction du nombre de cassettes) et une expression algébrique mettant en jeu un rapport non entier entre ces deux inconnues.

En résumé, cette seconde activité vise essentiellement un retour effectif sur les acquis antérieurs des élèves concernant la résolution algébrique des équations du premier degré à une inconnue, afin d'amorcer le travail autour de la résolution algébrique d'équations du premier degré à deux inconnues. Le professeur sera donc confronté d'une part, à la substitution algébrique qui nécessite à son tour une technique forte par un retour à l'énoncé et une mise en équation, , d'autre part, à une décontextualisation des connaissances en jeu (tâches isolées) pour aller vers une résolution algébrique des équations à deux inconnues.

***Analyse de l'activité 3***

L'activité 3 représente un problème numérique du type « trouver deux nombres » qui se modélise par l'équation $1/3(m - n) = (m + n)$ et fait apparaître visiblement les deux inconnues de part et d'autre de l'égalité. Une technique forte peut être mise en œuvre autour d'un travail de transformation de cette écriture sous la forme canonique institutionnalisée : $ax+by+c=0$ ou sous la forme « fonctionnelle » $y = ax+b$ ; ce qui n'est pas imposé même si on pense qu'il est attendu puisqu'il s'agit de trouver plusieurs couples solutions sur la base de cette écriture. Les élèves peuvent très bien mobiliser une technique faible en proposant des entiers qui satisfont à l'équation trouvée par essai erreur. La première question qui convoque le type de tâche : « Donner un couple de nombre vérifiant une équation à deux inconnues donnée » peut très bien être accompli par une technique du type arithmétique invisible ou faible, étant donné la forme triviale de l'équation $m+2n= 0$, éventuellement obtenue après simplification de l'équation initiale.

La seconde question fait appel au type de tâches « Vérifier si un couple de nombres donné vérifie une équation donnée » et suggère l'utilisation d'une technique faible de substitution numérique.

La troisième question se rapporte au type de tâches : « Pour une équation à deux inconnues données, trouver la valeur de l'une des inconnues connaissant l'autre », qui permet de mettre en avant la technique algébrique autour de la résolution des équations à deux inconnues en se fixant une valeur pour l'une des inconnues et en recherchant la deuxième inconnue (substitution puis résolution d'équations du premier degré).

Enfin la quatrième et dernière question se rapporte aux deux types de tâches :

« Pour une équation donnée, donner n (ici 5) couples solutions » et « représenter graphiquement les couples solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues ». Le premier vise la recherche spontanée de couples solutions de l'équation initiale. L'autonomie laissée à l'élève dans cette recherche (sans que des valeurs soient suggérées) permet le réinvestissement de techniques algébriques invisibles ou faibles qui ont fait l'objet d'une partie de l'activité précédente : cependant la forme simple de l'équation obtenue après transformation m = -2n limite sans doute la portée de ces techniques ; l'élève pouvant se contenter de substitutions numériques triviales. En outre, la désignation des lettres par m et n peut induire à la seule mobilisation du registre numérique dans un contexte lié au choix d'entiers.

D'autre part, cette liberté dans le choix de cinq couples solutions, semble un point de départ pertinent pour la question qui va suivre. En effet, la question suivante a pour objet la représentation des points correspondant dans un repère cartésien. L'accomplissement de ce type de tâches repose sur des connaissances dans le registre graphique (repère cartésien du plan, coordonnées (abscisse, ordonnées) d'un point, lecture d'un graphique supposées disponible. Le fait que les élèves aient pu choisir aléatoirement les coordonnées des points donnera sans doute davantage de poids à la constatation d'alignement de ces points qu'implique la question posée à la fin de l'activité : « que remarquez-vous ? ». Cet alignement des points peut faire l'objet d'un simple constat expérimental sur la base d'un dessin, ou bien être justifié par la forme de l'équation transformée m = -2n, au travers d'une mise en relation avec les OM relatives à la représentation graphique des fonctions linéaires, qui ont été étudiées auparavant.

A aucun moment de l'étude, les auteurs du manuel n'évoquent le fait qu'une équation à deux inconnues admet une infinité de solution. Il n'y a aucune trace de langage de type ensembliste au niveau de l'OM construite autour de la résolution à l'exception de la situation 4 de la rubrique « mobiliser ses compétences », dont la consigne convoque l'ensemble de couples de nombres solutions d'une équation donnée. Dans la définition, seule subsiste la notion de couple « solution » d'une équation. On pourrait s'attendre à ce que l'enseignant s'appuie sur cette 3$^{ème}$ activité contrairement aux deux premières, pour faire admettre aux élèves l'infinité de solutions en ayant probablement recours au registre graphique.

***<u>Une situation du manuel rajoutée par P1 l'année 2</u>***

La seconde année d'application de la réforme, l'enseignante propose aux élèves une situation du manuel qui figure dans la rubrique « mobiliser ses compétences ». L'objectif de cette situation est clairement affiché : « *modéliser un problème par une équation du premier degré à deux inconnues* ». Ces situations sont suivies d'une « *stratégie de résolution* » qui évoque la technique de mise en équation.

**Situation**

| |
|---|
| Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme augmenté de 2. Représenter graphiquement l'ensemble des couples de nombres qui répondent au problème. |

Stratégie de résolution

a. Faire le choix des inconnues.
b. Mettre le problème en équation.
c. Résoudre graphiquement l'équation.
d. Vérifier et interpréter le résultat.

Ici, la mise en équation apparaît clairement comme un enjeu essentiel. La technique attendue est une technique plutôt forte qui requiert de la part de l'élève, la conversion des informations stipulées du registre du langage naturel vers le registre des écritures algébriques. Elle vise un moment d'évaluation de la technique : les élèves choisissent des lettres pour désigner les inconnues et traduire l'information « le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme augmenté de 2 » en équation à deux inconnues. Même si l'écriture algébrique attendue est sémantiquement congruente à l'énoncé, elle demeure tout de même d'une forme plus complexe que celles rencontrées dans les autres activités. Elle fait apparaître les inconnues de part et d'autre de l'égalité ce qui suggère un travail de transformation algébrique pour revenir à la forme canonique institutionnalisée. On peut s'attendre à ce que le professeur convoque des techniques fortes pour modéliser la situation évoquée puis résoudre graphiquement l'équation trouvée. Nous constatons, par ailleurs qu'à aucun moment, le terme « ensemble de couples de nombres » n'est cité dans le manuel et que le professeur peut être amené à expliciter l'ensemble de solutions avant d'aborder la résolution graphique de l'équation en visualisant les couples solutions.

***Analyse des problèmes d'enseignement***

Nous avons, au travers de cette analyse mis en avant certaines caractéristiques de l'OM de référence mise à l'étude au travers de ces trois activités, relative pour une part à la mise en équation, et pour une autre part à la résolution d'équation à deux inconnues.

Par rapport à la mise en équation, des rôles différents lui semblent attribués d'une activité à l'autre. Dans la première activité, le problème de la mise en équation pourrait bien être résolu sans recours à l'algèbre, dans le cadre numérique ; il permet dès lors un travail intermédiaire entre numérique et algébrique, visant à amorcer « en douceur » le travail algébrique d'ailleurs fortement guidé par l'énoncé. Ce qui n'est pas sans soulever des questions relatives à la signification limitée, que peuvent prendre les connaissances algébriques émergentes dans ce contexte : notamment celles relatives à la résolution d'une équation à deux inconnues, et au couple solution d'une telle équation.

La deuxième activité accorde à la mise en équation une place plus importante : l'élève ayant davantage à sa charge les sous tâches typiques de désignation des inconnues et d'écriture de l'équation modélisant la situation évoquée (nombres décimaux mis en jeu, équation de forme plus complexe). Remarquons que cette activité laisse également plus de place au travail algébrique : elle permet d'amorcer des techniques algébrico-numériques qui seront réinvesties directement pour la représentation d'équations à deux inconnues dans le registre graphique (à l'occasion notamment de l'activité suivante), et plus indirectement pour la résolution de systèmes d'équations.

La mise en équation semble mise en retrait dans la troisième et dernière activité : même si l'énoncé à traduire algébriquement n'est pas trivial et se ramène à une équation de forme plus complexe, les inconnues sont désignées dans la consigne. L'objet de cette activité paraît davantage dans la résolution graphique d'une équation à deux inconnues : ce qui permet d'ailleurs de réinvestir une partie des techniques algébriques introduites à travers la deuxième activité.

Cette analyse des OM mises en jeu par ces trois activités permet par ailleurs, de dégager des contraintes susceptibles de peser sur la pratique d'un enseignant cherchant à mettre en place l'organisation didactique suggérée par le manuel.

Ainsi, par exemple, on peut se demander comment le professeur peut dépasser ou non les significations particulières données à la résolution d'une équation du premier degré à deux inconnues réelles et au couple solution d'une telle équation, au travers de la première activité qui reste plongée dans le cadre numérique. On peut également s'interroger sur la manière dont elle compte s'y prendre pour faire admettre aux élèves qu'une équation à deux inconnues possède une infinité de solution d'autant plus que les deux premières activités abordent la résolution dans un ensemble fini. On peut également se poser la question de la façon dont l'enseignante va choisir de gérer l'articulation entre les registres algébrique et graphique au fil de la troisième activité dont le contexte reste particulier à la représentation graphique de fonction affine.

A la suite de ces activités, il est question du thème consacré aux systèmes d'équations au travers des activités choisies par l'enseignante. Nous continuons à suivre la même méthodologie pour faire une analyse a priori des activités choisies par l'enseignante. Notons que pendant la première année d'application de la réforme, P1 a choisi les activités 4,9 et 11 du manuel alors que la seconde année, elle propose les activités 4, 5, 6,11 et 13 du manuel à ses élèves. Nous expliciterons certaines raisons du choix fait par l'enseignante à partir des entretiens préalables à l'observation.

## I.2 Autour du second thème : « Système de deux équations du premier degré à deux inconnues »

L'objet de savoir « systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues » est introduit dans le manuel à la suite du thème d'étude « équations du premier degré à deux inconnues. L'activité 4 tout comme l'activité 1 permet d'introduire cet objet de savoir. Les méthodes de résolution algébrique sont abordées dans les activités 5 et 6 que l'enseignante choisira seulement l'année suivante. Au cours des premières observations, elle se contente de présenter ces techniques de résolution algébrique sur un exemple qu'elle conçoit. L'activité 9 met en œuvre l'outil algébrique « système d'équations » pour résoudre la situation évoquée. L'activité 11, permet une entrée dans le travail graphique autour de la résolution et l'activité 13 traite dans le registre graphique le cas particulier d'un système d'équations qui n'admet pas de solutions.

Les organisations mathématiques principales auxquelles se rattachent les activités du manuel sont celles évoquées pour le premier thème d'étude : des organisations mathématiques liées à la mise en équations, et des organisations liées à la résolution des systèmes d'équations qui continuent à être travaillées de façon simultanée dans les organisations mathématiques de référence mais que nous choisissons d'analyser séparément pour mettre plus en avant la pratique du professeur en fonction de ces deux types de tâche.

Avant d'entrer dans l'analyse a priori, nous reprenons les énoncés des activités choisies par P1 les deux premières années pour construire son cours autour de ce second thème d'étude.

**Activité 4**

Une boite contient R boules rouges et N boules noires telles que
- Le triple de N est égal à R diminué de 3.
- Le quadruple de N est égal à R augmenté de 4.
- Mettre le problème en équations.
- Déterminer R et N.

**Activité 5**

On se propose de trouver deux nombres m et n tels que
1. Leur somme est égale à 96
2. En ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient le double de l'autre.
3. Ecrire deux équations qui traduisent les deux conditions.
4. a)Exprimer m en fonction de n dans l'une des deux équations.
   b) Remplacer m par l'expression trouvée dans l'autre équation et résoudre l'équation obtenue.
5. En déduire m et n.

**Activité 6**

Cinq cahiers et deux stylos coûtent 3300 millimes.
Trois cahiers et quatre stylos coûtent 2400 millimes.
1- Montrer que le système suivant modélise la situation

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 & (1) \\ 3x + 4y = 2400 & (2) \end{cases}$$

2-a) Multiplier les deux membres de l'équation (1) par 3.
b) Multiplier les deux membres de l'équation (2) par -5.
3- Additionner les deux équations obtenues et en déduire y.
4- Remplacer y par sa valeur dans l'une des équations du système et déterminer x.
5- Donner le prix d'un cahier et celui d'un stylo.
6-Ya-t-il une autre méthode ?

**Activité 9**

Un grand père décide de partager la somme de 800 dinars entre ses deux fils proportionnellement au nombre de leurs enfants respectifs. On sait que le fils aîné a trois enfants et le fils cadet a deux enfants.
1- Mettre le problème en équations.
2- Déterminer la somme d'argent que reçoit chacun des fils.

**Activité 11**

Une salle de sport propose à ses clients les deux options ci-après.
Première option : le client paye 5 dinars par séance.
Deuxième option : le client paye un abonnement de 28 dinars puis 3 dinars par séance.
On se propose de déterminer graphiquement l'option la plus avantageuse, en fonction du nombre de séances.
1. Exprimer le prix p(x) à payer pour x séances selon la première option.
2. Exprimer le prix p'(x) à payer pour x séances selon la deuxième option.
3. Le plan est muni d'un repère (O, OI, OJ). Déterminer graphiquement le nombre de séances pour lesquelles les deux options sont équivalentes.
4. Discuter suivant les valeurs de x l'option la plus avantageuse.

**Activité13 (un exemple est rajouté par P1)**

Résoudre dans $IR^2$, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2y = 4x + 6 \end{cases}$$

## I.2.1 Description et analyse des organisations praxéologiques autour de la mise en équation

***Analyse de l'activité 4***

L'activité 4 se présente sous la forme d'un problème concret. L'énoncé prend en charge une grande partie du travail de mise en équation : le choix des deux inconnues, leurs désignations par les lettres R et N ainsi que le découpage explicite des informations à convertir en équations. Cette conversion peut très bien être entreprise par une technique invisible de la part des élèves, puisque les relations à traduire sont congruentes aux écritures algébriques. Cependant, on peut s'attendre à ce que le terme « quadruple » qui est un peu technique et pas très familier pour les élèves fasse obstacle à l'écriture de la deuxième équation qui modélise le problème. Ce qui requiert de la part du professeur une technique au moins faible pour aider certains élèves à dépasser d'éventuels obstacles liés à la langue. La mise en équations parait très guidée d'autant plus que le domaine numérique mis en jeu (l'ensemble des entiers naturels) facilite le travail autour de la conversion et de la résolution.

***Analyse de l'activité 5***

L'organisation mathématique développée dans cette activité est assez proche de celle préconisée auparavant, à l'exception du fait que la deuxième relation à écrire peut paraître un peu plus complexe dans la mesure où la traduction de l'information « en ajoutant 78 à chacun d'eux, l'un devient le double de l'autre » en l'équation $m+78 = 2(n+78)$ requiert de la part des élèves un effort supplémentaire au niveau de la mise en équation puisque ces deux écritures ne sont pas sémantiquement congruentes. En plus les lettres m et n jouent des rôles symétriques au niveau de l'équation qui modélise la situation évoquée par l'énoncé.

***Analyse de l'activité 6***

La situation évoquée dans cette activité est encore assez simple et requiert une technique faible de la part des élèves puisque il s'agit de vérifier que le système donné modélise bien le problème, d'autant plus que le contexte suggéré est assez familier et qu'il nécessite une explicitation des relations en jeu. Il semble d'ailleurs que la mise en équation n'est pas réellement motivée par cette activité et que l'enjeu de savoir ne se situe pas à ce niveau, mais au niveau de la résolution algébrique.

***Analyse de l'activité 9***

L'activité 9 choisie par l'enseignante représente une situation « classique » : un problème de « partage inégal » dont la technique de mise en équation est entièrement laissée à la charge de l'élève. Dans ce sens, on peut prévoir l'apparition de techniques fortes mettant en avant les sous types de tâches précitées : Le choix des deux inconnues et leur désignation par des lettres (les parts respectifs du fils aîné et du fils cadet). La conversion entre registres est également de nature plus complexe puisqu'elle suppose une réorganisation et une nouvelle restructuration des informations. Les élèves sont amenés dans ce cas à traduire une formule mathématique : une relation de proportionnalité entre nombres qui peut constituer un obstacle à la mise en équation :
« x et y sont proportionnels à a et b signifie $x/a = y/b$ ». On pourrait s'attendre à ce que l'enseignante fasse appel à la mémoire collective de la classe autour de la proportionnalité pour dépasser des difficultés éventuellement rencontrées par les élèves. Notons également que le domaine des nombres mis en jeu par cette situation est moins trivial que les précédents, car il suppose un dépassement du raisonnement arithmétique pour proposer des solutions sur la base d'un raisonnement algébrique.

***Analyse de l'activité 11***

L'activité 11 se présente comme un problème concret très proche des situations que l'on a pu relever dans le manuel officiel de la contre- réforme. Elle s'organise essentiellement autour de la résolution graphique. Les lettres qui interviennent n'ont plus le statut d'inconnue mais plutôt le statut de variable (x variable, P(x) et p'(x) introduisent d'une part le fait que x peut prendre diverses valeurs et quelque soit la valeur de x donnée). Les relations $P(x) = 5x$ et $p'(x) = 28 + 3x$ renvoient à des relations fonctionnelles qui rappellent les expressions algébriques de fonctions linéaires et affines. L'enseignante, pour faire émerger la technique de résolution graphique d'un système d'équation est amenée à décontextualiser les connaissances mises en jeu par l'activité et mettre l'accent sur l'objet de savoir à enseigner d'autant plus que la technique graphique n'est pas institutionnalisée dans le manuel, rendue muette, elle ne fait l'objet d'aucune explicitation (pas de technique explicite ni de discours technologique).

### I.2.2 Description et analyse des organisations praxéologiques autour de la résolution des systèmes d'équations

***Analyse de l'activité 4***

Dans cette activité, plusieurs techniques peuvent être mises en œuvre par les élèves, une technique invisible que les élèves peuvent très bien mobiliser en cherchant par essai erreur les valeurs entières positives de R et N ( R égale à 24 et N égale à 7) qui vérifient simultanément les deux équations trouvées. : $3N = R - 3$ et $4N = R + 4$. La formulation de la consigne et le choix des paramètres laissent suggérer que des solutions arithmétiques sont tout à fait envisageables. Une technique faible qui s'appuie sur les connaissances rencontrées autour des équations à deux inconnues peut également être mise en œuvre par les élèves : chercher par exemple certains couples solutions de l'une des équations et vérifier s'ils vérifient la seconde équation. D'autres techniques fortes peuvent apparaître amorçant les méthodes algébrique autour de la substitution de l'élimination, peuvent être prévues comme par exemple additionner ou retrancher les égalités trouvées membre à membre : dans ce cas N est obtenu. Une autre technique forte peut être suggérée, celle de résoudre les deux équations chacune à part puis de prendre l'intersection des deux ensembles de solutions ce qui est très improbable étant donné le peu de connaissances que les élèvent disposent à propos des notions d'ensemble et d'intersection.

***Analyse des activités 5 et 6***

Notons, à la suite de cette activité, que l'objet « système de deux équations à deux inconnue » est institutionnalisé suivis des deux techniques de résolutions par substitution et par élimination introduites au travers des activités 5 et 6 du manuel présentent un découpage de la techniques en sous tâches de façon amenant les élèves peu à peu à se construire un algorithme de résolution d'un système d'équation donné.

Toutefois les systèmes proposés ne mettent en jeu que des solutions uniques et l'on peut se demander si le professeur choisira d'étendre cette étude dans le registre algébrique à des systèmes qui n'admettent pas de solution ou qui admettent une infinité de solutions.

A la différence de la technique graphique non institutionnalisée dans le manuel, les techniques algébriques sont reprises explicitement en mettant en avant les sous types de tâchant composant chacune des techniques :

- Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des équations.
- Remplacer dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée.
- Résoudre cette nouvelle équation à une inconnue.
- Déterminer, si elle existe, la (ou les) valeur (s) de l'autre inconnue.

« La force » de la technique est laissée à la charge de l'enseignant qui devra justifier par un discours technologico-théorique l'équivalence des systèmes d'équations au fil de la résolution

- Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsque l'on additionne les deux équations obtenues, on obtient une équation à une seule inconnue.
- Résoudre l'équation trouvée.
-Déterminer, si elle existe, la (ou les) valeur(s) de l'autre inconnue.

***Analyse de l'activité 9***

L'activité 9 du manuel met en jeu la résolution d'un système obtenu à partir d'une mise en équations $\begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases}$

Plusieurs techniques peuvent être prévues, une technique par essai-erreur mais qui reste peu probable compte tenu du contexte numérique en jeu. Des techniques sont plutôt envisageables, notamment à la suite de l'institutionnalisation des techniques algébriques autour de la résolution des systèmes d'équations à deux inconnues.

***Analyse de l'activité 11***

L'activité 11 aborde de manière explicite le travail graphique autour des systèmes d'équations. Les élèves sont supposés mobiliser leurs connaissances antérieures concernant les représentations graphiques des fonctions linéaires et affines. Les expressions algébriques de ces fonctions p(x) = 5x et p'(x) = 28 + 3x sont obtenues après une modélisation de la situation x jouant le rôle de variable appartenant à IN.

Lorsque les deux « options sont équivalentes » autrement dit p(x) = p'(x), la résolution graphique du système obtenu $\begin{cases} p(x) = 5x \\ p\ (x) = 28 + 3x \end{cases}$

se ramène à la recherche de l'abscisse du point d'intersection des deux droites D et D' représentations graphiques des fonctions p et p' en projetant celui-ci sur l'axe des abscisses (OI) parallèlement à l'axe des ordonnées (OJ) pour lire ainsi l'abscisse du point correspondant.

La question 4 suppose de la part des élèves une discussion sur la base du graphique des solutions des inéquations $p(x) \geq p'(x)$ ou $p(x) \leq p'(x)$ (position des droites D et D' par rapport au point d'intersection). Cette activité articule à la fois les registres algébrique et graphique en faisant intervenir de façon implicite l'objet « système de deux équations à deux inconnues ». On peut se demander comment l'enseignante gère cette dialectique entre registres à la vue des statuts différents des lettres x et y que l'activité met en jeu.

## Analyse des problèmes d'enseignement

Tout comme pour l'analyse du thème précédent, on a pu constater les différents rôles joués par la mise en équation au travers des situations proposées : dans la première activité, ce travail de modélisation fortement guidé vise une introduction de l'objet de savoir au travers d'une situation concrète. Cependant, le contexte évoqué par la situation mettra le professeur devant le fait qu'il devra, tout comme pour les équations à deux inconnues expliquer le fait que le domaine de résolution s'étend à $IR \times IR$ et qu'il ne se limite pas à la recherche d'entiers. La recherche des valeurs de R et N pouvant se faire par des techniques arithmétiques on se demande comment l'enseignante développera un cheminement algébrique pour avancer dans son projet.

Dans l'activité 9 on perçoit la mise en équation comme un véritable enjeu d'enseignement qui laisse dans le topos de l'élève la responsabilité du découpage de la technique et de l'accomplissement des sous types de tâches : choix des deux inconnues, travail de conversion, de mise en équations et de résolution d'un systèmes par l'une des méthodes suggérées.

Dans l'activité 11, se pose une gestion des expressions algébriques en jeu, de la dialectique ancien/ nouveau (fonction/équation/ systèmes) et des conversions entre les registres algébrique, graphique et fonctionnel.

Ces points mis en avant au niveau de cette analyse, laissent de nouveau entrevoir la nécessité d'une étude simultanée par le professeur des organisations mathématiques autour de la mise en équation et de la résolution au sein des thèmes d'étude considérés.

# II. Analyse des pratiques de P1 pendant deux années consécutives : Evolution des pratiques autour des thèmes équations et systèmes d'équations

## Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons analysé les évolutions du curriculum officiel au sein de l'institution considérée : en étudiant les changements dans les organisations du savoir mathématique à enseigner et les organisations de l'étude prescrites par l'institution tunisienne en se focalisant sur les deux thèmes d'étude : équation à deux inconnues et système d'équations. Nous montrons ainsi en quoi la dimension institutionnelle des pratiques scolaires qui a fait l'objet d'une étude nourrie par la théorie anthropologique du didactique en éclaire la dimension professionnelle : celle des pratiques enseignantes dans un contexte de réforme d'un curriculum. La « fidélité apparente » aux organisations mathématiques et didactiques de référence pour la réforme moderne reste difficile à confirmer sur la seule base de l'étude d'un cahier : cette étude ne nous renseignant pas sur la gestion didactique qui accompagne les activités ou tâches mises en œuvre. C'est pourquoi nous avons choisi d'entrer dans l'intimité des pratiques de classe.

Commençant par une analyse *a priori* des situations correspondant aux organisations mathématiques apprêtées par P1 dans le cadre des deux thèmes d'étude nous passons ensuite à l'enseignement effectif conduit par P1 dans sa classe autour de ces organisations mathématiques lors de la première et de la seconde année d'application de la réforme.

Ce chapitre est consacré à l'analyse détaillée des organisations mathématiques et didactiques enseignées permettant de décrire les activités de l'enseignante en précisant la place des techniques dans le travail mathématique (Assude 2007) . Nous nous interrogeons sur leur proximité avec les organisations praxéologiques de référence (c'est-à-dire celles suggérées par le manuel officiel) en suivant le déroulement chronologique des séances observées dans la classe de P1.

Pour ce faire nous identifions dans un premier temps des caractéristiques essentielles des organisations mathématiques effectivement mises à l'étude par le professeur, en précisant les *topos* respectifs des élèves et de l'enseignante, relatifs à ces organisations au fil de cette étude, tout en s'interrogeant sur ce que cette répartition des rôles dans l'activité mathématique ou *topogénése* révèle des organisations didactiques mises en place par l'enseignante.

Cette description des tâches et des techniques didactiques nous permettra de caractériser les organisations didactiques développées par P1 pour gérer les activités proposées.

Nous menons ensuite l'analyse des protocoles en utilisant des outils empruntés à la théorie des situations didactiques, de façon métaphorique pour interpréter les changements ou les résistances perçus dans les pratiques données à voir par P1 et mettre ainsi en évidence un ensemble d'éléments permettant d'expliquer les écarts existants, d'une part, entre le savoir enseigné par P1 et le savoir à enseigner tel qu'il est préconisé et mis en texte au niveau du manuel officiel et d'autre part entre le savoir enseigné l'année 1 et celui mis en place l'année 2 tout en s'interrogeant sur les points de conformité et de non conformités aux praxéologies de référence perçus dans cette évolution .

En vue d'approcher la pratique de l'enseignante dans sa complexité et de mieux comprendre le système de contraintes, qui l'amène à adopter telle attitude plutôt qu'une autre, nous relevons *différentes techniques didactiques* pour chaque praxéologie ou pour chacun des types de tâche. Cette recherche des techniques du professeur s'apparente à l'identification de *routines* ou d'éléments stabilisés dans les pratiques de l'enseignante. La recherche des régularités et des invariants en fonction des types de tâches, des modalités de gestion, des interactions en classe… nous a amené à nous inspirer de différentes approches théoriques : la Théorie Anthropologique du Didactique, la Théorie des Situations Didactique, la double Approche de Robert. Rogalski (2002), et la Théorie de l'action du professeur de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), Assude (2004) Assude rejoignant ainsi les propos de Robert : « Toutes ces recherches, qu'elles qu'en soient les permisses et les présupposés théoriques se rejoignent d'une certaine manière en explorant le rôle de l'enseignant, compte tenu de ses marges de manœuvre et des contraintes qui pèsent sur lui » (Robert 1999, p.14).

Sans emprunter directement aux deux dernières approches précitées (c'est-à-dire sans en utiliser les outils systématiques de description de la réalité), nous caractérisons des routines de pratiques professorales en situation de classe. Un de nos principaux indicateurs renvoie aux *mouvements topogénétiques*, mis en avant par Mercier et Schubauer-Léoni (2002).[22] Nous essayons également de repérer des successions

[22] « Les techniques identifiées à ce jour [considérées plus loin comme des routines pour le professeur au sein de sa pratique d'enseignement] dans nos travaux portent [en partie] sur les mouvements

répétitives ou « phases » de gestes ou de discours de l'enseignante, sans en préciser a priori une fonctionnalité plus précise que de faire avancer le projet d'enseignement. Ceci nous rapproche davantage de la Double Approche (Butlen, Masselot, Robert et Vandebrouck 2002) suggèrent de pister ce type de récurrences pour cerner les composantes méditative et cognitive des pratiques qui renseignent sur l'organisation de la séance par l'enseignante et ses actions pendant le déroulement de la séance.(Robert, 1999). Toujours selon cette approche, la combinaison de ces deux composantes permet de dégager plus globalement des logiques d'action de l'enseignante qui prennent en compte ses activités.

L'identification de ces routines nous parait cruciale par rapport à notre problématique car elle peut nous renseigner sur la stabilité et l'imperméabilité des pratiques enseignantes aux changements prescrits à travers une réforme.
Mais nous nous intéressons également aux possibilités d'évolution des pratiques des professeurs : cette fois-ci en termes de *régulations* des praxéologies mathématiques et didactiques. A cet effet, nous empruntons comme nous l'avions déjà signalé, de façon métaphorique, le point de vue de la Théorie des Situations Didactiques en nous interrogeant sur ce qui peut constituer un milieu de nature antagoniste pour les pratiques enseignantes et être à l'origine de régulations dans ces pratiques. Notamment, s'agit-il d'éléments observés, « vécus » par le professeur en situations de classe ou relatifs à ces situations d'enseignement ? Et si oui, lesquels ?

Pour éviter les redondances et une lecture trop fastidieuse de l'ensemble de ces analyses détaillées (reportées en annexes n°, page), nous choisissons d'en présenter une synthèse de ce travail, organisée selon la méthodologie citée et si nous ne suivons pas l'ordre chronologique des séances de classe de P1, ou ne donnons pas à voir systématiquement le découpage en thèmes d'étude « équations à deux inconnues » et « systèmes à deux équations à deux inconnues » (notre propos étant souvent commun à ces deux thèmes), nous conservons toutefois le découpage suivant les deux principales organisations mathématiques étudiées : liées pour une part à la mise en équation(s) et pour une autre part à la résolution d'équations (systèmes d'équations, algébrique ou graphique) afin de faire écho aux analyses *a priori* développées auparavant.

---

topogénétique permettant ainsi la gestion des territoires et des temporalités. » (Mercier et Schubauer-Leoni 2002, p.2).

## II .1 Analyse de la pratique de P1 : Première année d'enseignement de la réforme

### II.1.1 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la mise en équation

#### II.1.1.1 Des organisations mathématiques calquées sur celles de référence

Suivant assez scrupuleusement les activités du manuel officiel dans l'ordre indiqué, P1 a fait le choix de mettre en place des organisations mathématiques, à la fois autour des équations à deux inconnues et des systèmes linéaires, calquées sur les organisations mathématiques de référence. Ce choix déjà mis en avant dans nos analyses a priori traduit son souci de mise en conformité avec la nouvelle réforme.

Ce souci est également apparent dans l'organisation et la mise en œuvre de ces activités au sein de la classe.

Elle reprend à chaque fois les consignes des activités, relatives au type de tâches : modéliser le problème par une équation (ou système d'équations), en suivant fidèlement le découpage préconisé dans le manuel, comme on peut le constater dans l'extrait suivant :

P : Vous prenez le livre à la page 228, on commence la 1ére activité, vous écrivez le titre de la leçon et on passe à l'activité.
P écrit au tableau :
I- Equations du premier degré à deux inconnues

Activité 1 p 228
P : Silence activité n°1, commencez à répondre, allez on commence vous lisez Maroua
Maroua lit l'énoncé de l'activité
P : Est ce que le texte est clair ? Est ce que vous avez compris ?
bouhaaaa…
P : vous avez un dé, un dé c'est un cube qui a six faces, voilà un dé (elle montre un dé) on va lancer deux dés quelle relation entre x et y on a, sachant que x est le nombre qui apparaît sur le 1ér dés et y sur le 2ème et que la somme est égale à 6.
P : allez qui passe au tableau

#### II.1.1.2 Des techniques mathématiques de mise en équation, toujours « muettes » ou « faibles »

Si les organisations mathématiques effectivement mises à l'étude par P1 autour de la mise en équation semblent toujours « calquées » sur celles du manuel, les techniques mathématiques liées aux types de tâches de mise en équation, convoquées dans la plupart des activités sont souvent « passées sous silence ».

C'est-à-dire que ce soit au sein du thème équations ou système d'équations ; après une rapide lecture de l'énoncé de l'activité, l'enseignante propose elle-même d'emblée l'équation qui modélise la situation évoquée : soit en dictant la réponse à l'élève au tableau, soit en prenant elle-même à sa charge l'écriture de cette équation. L'organisation mathématique enseignée autour de la mise en équation paraît ainsi « cachée » ou invisible puisque aucune technique ou élément technologique n'est explicité à son sujet.

L'extrait suivant sur la première activité sur les équations à deux inconnues illustre bien ce phénomène.

E1 : Madame, madame
E1 passe au tableau et p lui dicte :
P : On désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face des deux dés
a- La relation entre x et y est définie par : $x + y = 6$
P : vous encadrez le résultat, bon 2$^{\text{ème}}$ question combien il y a de couples (x, y) tel que x plus y égal 6

Toutefois, cette façon de procéder de P1 pourrait être interprétée comme une réponse au fait que dans une partie des activités, les tâches de mise en équation à accomplir sont de nature assez triviale. Nos analyses *a priori* ayant en effet permis de mettre en avant le caractère élémentaire de ces tâches mathématiques pour un bon nombre d'activités (les activités 1, 2 et 3 se rapportant au thème d'étude équations à deux inconnues et les activités 4, 9 et 11 année 1 et 4, 5, 6, 11 et 13 année 2 se rapportant aux thèmes d'étude système de deux équations à deux inconnues.

Toutefois, P1 ne semble leur accorder guère plus d'importance dans certains cas, où l'on peut penser qu'elles pourraient toutefois présenter un caractère plus problématique pour les élèves.

Par exemple, l'activité 2 (toujours liée au thème « équations à deux inconnues ») convoque une technique qui repose sur de nombreuses sous-tâches de conversion : le choix des inconnues, la désignation par des lettres et la conversion de l'énoncé en une équation à deux inconnues et qui ne sont cette fois, pas pris en charge par la consigne. Même si la technique de mise en équation est moins muette que dans l'activité précédente, elle reste tout de même faible, puisqu'elle n'est pas accompagnée d'aucune justification technologico-théorique.

P : Notre problème est de modéliser la situation le prix d'une cassette est 2.500 dinars le prix d'un CD est 15 dinars et la somme d'argent est 100 dinars.
E2 : madame
P : il faut d'abord désigner par x le nombre de cassettes et y le nombre de CD
p écrit au tableau et les élèves recopient :
a) On désigne par x le nombre de cassettes.

On désigne par y le nombre de CD.
Sachant que le prix d'une cassette est 2,500D et le prix d'un CD est 15D.
b) Mise en équation
$2{,}500\,x + 15\,y = 100$

Au final, à l'exception de l'activité 9 (qui est l'avant dernière activité liée aux systèmes d'équations), les techniques de mise en équation mises en œuvre dans les activités 1,2 3 4 et 11 sont toujours « muettes » ou très faibles. Tout comme dans l'activité 3 citée ci-dessous :

p : cette phrase m et n tel que le tiers de leur différence est égale à la somme se traduit par… passez au tableau
E : qu'est ce qu'on va faire ?
p : on va chercher les nombres.
P fait passer un élève au tableau qui écrit ce que P1 lui dicte :
P : $\frac{1}{3}(m - n) = (m + n)$.

#### II.1.1.3 Le topos de l'élève quasi-inexistant

Ce caractère muet ou faible des tâches de mise en équation est renforcé par le peu de place laissée aux élèves lors de l'accomplissement du travail de mise en équation.
On peut constater au vue des épisodes transcrits ci-dessus un *topos* très restreint pour l'élève (que ce soit celui parfois envoyé au tableau à qui P1 dicte les équations à écrire, qui sert de « porte-craie » ou ceux restés à leur place qui se contentent de recopier ce qu'écrit leur camarade sous la dictée ou P1 au tableau).
L'extrait ci-dessous concernant l'activité 4 relative aux systèmes d'équations à deux inconnues illustre bien notre propos :

p : sayez, bon vous lisez d'abord

E4 : madame
p : vas-y lit
p : répète la question et passe au tableau
E4 passe au tableau et écrit ce que p lui dicte
P : a- La relation entre x et y est définie par $x+y = 10$

Ces constatations nous conduisent à supposer que la mise en équation ne représente pas un véritable enjeu d'enseignement pour l'enseignant aux moments observés dans sa classe : il ne s'agit même pas d'ostension déguisée mais bien d'une prise en charge complète des tâches attenantes à la mise en équation, sans même prendre le temps d'expliciter les techniques en jeu.
Cette absence d'enjeu provient-elle de la nature spécifique des techniques de mise en équation (non référées à des savoirs mathématiques identifiables à ce niveau) ? Ou du fait que P1 appréhende ces techniques comme « transparentes » pour les élèves ?

Quoiqu'il en soit, sa pratique paraît décalée sur ce point par rapport aux organisations mathématiques de référence qui sous-entendent l'étude simultanée de techniques relatives à la mise en équation et liées à la résolution d'équation.

**L'exception de l'activité 9**

Toutefois, l'avant dernière activité relative à l'étude des systèmes d'équation fait un peu exception à la règle. Il s'agit au fait d'un type de problèmes « classiques » que l'enseignante a pu rencontrer auparavant. D'après notre analyse *a priori*, la mise en équation convoquée par cette activité semble plus problématique : d'une part, car elle nécessite la mise en jeu de techniques de conversion en autonomie (désignation des inconnues par exemple), d'autre part, car l'écriture repose sur l'interprétation d'une relation de proportionnalité explicitée dans l'énoncé.

P1 laisse un peu plus de place aux élèves dans une réflexion collective qui précède l'écriture des équations. Des interactions publiques entre lui et certains de ses élèves s'ensuivent permettant notamment de mettre en avant la relation de proportionnalité qui sous-tend la mise en équation :

P : combien on va obtenir d'équations ?
E : deux
P : qu'est ce que ça désigne x et y ?
E1: x l'aîné, y le cadet
P : la part du fils aîné x et y c'est la part du fils cadet et après vous allez mettre le problème sous forme de deux équations.
E2 : x plus y égal 800 et x divisé par 3 et y divisé par 2 = 800
P : est ce que c'est vrai ? Lis bien la phrase (et se tourne vers le tableau pour écrire)
1) On désigne par x : la part du fils aîné
y : la part du fils cadet
2) Mise du problème en équation : x + y = 800 (1) (il s'arrête et interroge)
P : la 2éme équation, la part du 1er divisé par 3 et la part du 2éme divisé par 2 on trouve aussi 800 comment ? Lisez bien la phrase.
P : les deux parts sont proportionnels aux nombres de leurs enfants respectifs
E : bouhaa....
P : les deux parts sont proportionnels à 2 et 3 c'est à dire...
Bouhaaa....
P : x et y sont proportionnels à 3 et 2 comment on peut écrire cette phrase sous forme d'équations
E2 : x divisé par y
E3 : x plus y sur 3 plus 2
P : x sur trois égal....
E1 : y sur 2
P : x et y sont proportionnels à 3 et 2 signifie...
P écrit au tableau
x/3 = y/2 (2)
E4 : quoi proportionnel ?

On peut s'interroger sur ce qui explique cette nouvelle distribution des rôles et cette attention nouvelle portée à la mise en équations au sein de cette activité.

Est-ce parce que la technique de mise en équation repose en partie sur un savoir mathématique clairement identifiable : la proportionnalité ?

Ou bien est-ce parce que cette activité arrive en fin de parcours ? Elle pourrait pour cette raison apparaître comme un problème d'application, qui permet d'utiliser l'outil algébrique qui a fait l'objet d'une étude préalable.

Elle n'aurait alors pas vraiment caractère « d'activité introductive » : Ce qui représenterait dès lors, une proximité avec des organisations de l'étude plus anciennes où la mise en équation apparaissait davantage en aval du travail algébrique : avec des problèmes de mise en équation qui surgissent après une étude préalable et autonome des objets de savoir algébrique.

Il semble que l'expérience mathématique de notre enseignante joue un rôle crucial dans ce choix didactique: un choix qui parait classique et qui permet au travers d'une pratique régulière d'identifier les éléments de problématicité soulevés par sa résolution. Il semblerait donc que c'est le statut d'ancien qui prime et la valeur marginale de l'activité qui fait que P1 sait que ce n'est pas très facile de mettre ce type de problèmes en équation. Ce qui se confirme à la vue des réactions d'élèves en difficulté.

### II.1.1.4 Une technique didactique de P1 « masquant » la mise en équation

Le fonctionnement de P1 au cours des séances observées, relatif aux tâches de mise en équation convoquées de façon récurrente au fil des activités, révèle une succession de gestes qui se répète : P1 fait lire l'énoncé par un élève, fait passer un deuxième élève au tableau pour lui dicter la réponse : celui-ci lui servant dès lors de « porte-craie » sur cette phase de l'activité. Et ce malgré une volonté parfois apparente de certains élèves souhaitant intervenir publiquement pour contribuer à l'accomplissement de la tâche de mise en équation. Voici un dernier extrait mettant bien en avant cette suite invariante de gestes de l'enseignante, lorsqu'il s'agit d'introduire l'objet « système de deux équations à deux inconnues »

P : vous lisez bien l'activité,
p : on a des boules noires et des boules rouges tel que le triple de N est égal à R diminué de 3 , qui passe au tableau
E: madame
E1: 3N = R – 3
P: la 2ème vous suivez au tableau
Il fait passer une élève au tableau et lui dicte
P : 1) On désigne par R : le nombre de boules rouges
N : le nombre de boules noires. : mettre ce problème sous forme d'équation, on écrit :
2) Mise en équation
* 3N= R-3
*4N = R+4

C'est cette technique didactique qui permet dès lors à P1 de masquer le travail lié à la mise en équation dans la quasi-totalité des activités résolues en classe (à l'exception de l'activité 9 précitée) et de rendre le topos de tous les élèves quasi-inexistant à ce sujet. L'invisibilité de la technique de mise en équation est d'ailleurs renforcée par l'absence d'un geste d'institutionnalisation comme prévu par la manuel, puisqu'on voit apparaître plus loin dans la rubrique « mobiliser ses compétences » et à la suite de l'intitulé « modéliser un problème par une équation du premier degré à deux inconnues » une situation proposée suivie de la technique explicite de mise en équation comme on peut le voir :

Stratégie de résolution

- Faire le choix des inconnues.
- Mettre le problème en équation.
- Résoudre graphiquement l'équation.
- Vérifier et interpréter le résultat.

Du côté des élèves ce geste de l'enseignante semble renvoyer à un rapport particulier développé à la mise en équation comme « une connaissance qui n'est pas un enjeu d'apprentissage » : Par exemple dans l'activité 2 les élèves en viennent à négliger l'écriture des équations à partir d'un énoncé, tâche jamais laissée à leur charge et dont l'importance n'est jamais mise en avant par P1. L'élève envoyé au tableau « substituant » directement dans l'équation sans écrire l'équation $x = 2y$. Un phénomène didactique qui engendre un effet de régulation chez P1 l'amenant à exiger de la part des élèves une justification des expressions d'emblée avancées :

P : 3$^{ème}$ question qui lit ?
E3 lit la question pendant que p écrit :3) le nombre de cassettes est le double de celui des CD.
P : Vous allez déterminer le nombre de cassettes et de CD achetés
E4 : $2,5 \times 2y + 15 y = 100$
P : c'est juste ?
E5 : non
P : elle a dit $2,5 \times 2y + 15 y = 100$, le nombre de cassettes est le double de CD est ce qu'on peut traduire cette phrase par une égalité mathématique ?
bouhhhhh….
P : 2y qu'est ce que ça représente ?
E5 : le nombre de CD
P : comment traduire la phrase donc on cherche une relation entre x et y.
bouhhh….
P reprend de nouveau la question
E2 : $x = 2y$

#### II.1.1.5 L'absence d'une évaluation de la praxéologie mathématique liée à la mise en équation

L'évaluation est une étape fondamentale dans l'étude d'une praxéologie donnée puisqu'elle va surtout permettre de vérifier si une telle praxéologie répond convenablement aux critères préalablement définis et dont la satisfaction est supposée nécessaire pour un bon fonctionnement de cette praxéologie.

Or cette étape n'est pas prise en considération par P1 : Nous avons constaté l'absence dans les contrôles (devoirs de contrôle et de synthèse) de ce type tâche, les exercices proposés s'organisent exclusivement autour de la résolution d'équations ou de systèmes d'équations (cf. annexe du chapitre C3).

Nous émettons ainsi l'hypothèse, que l'absence d'un moment d'évaluation dans l'organisation de l'étude développée par l'enseignante, est un indice fort d'un enjeu d'enseignement « occulté » et un élément méthodologique, qui peut expliquer en partie la stabilité éventuelle de la praxéologie développée par l'enseignante lors de la deuxième année d'observation .

### II.1.2 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la résolution des équations et des systèmes d'équations

Nous étudions dans ce qui suit les organisations mathématiques enseignées autour de la résolution d'équations et de systèmes d'équations selon les critères retenus pour l'analyse.

***<u>L'empan algébrique « prépondérant » dans les organisations mathématiques</u>***

Tout d'abord, on peut constater que les organisations mathématiques liées au travail algébrique occupent une place prépondérante dans l'enseignement de P1 au sein des deux thèmes concernés.

Cela ressurgit à plusieurs niveaux lors de la première année d'observation dans sa classe.

#### II.1.2.1 Concurrence inégale entre des techniques algébriques et des techniques arithmétiques cachées ou ignorées

Tout d'abord, si notre analyse *a priori* permettait d'envisager des résolutions à caractère numérique ou arithmétique des problèmes proposés dans les activités introductives des équations ou des systèmes d'équations (l'activité 1 pour l'équation à deux inconnues, l'activité 4 pour le système de deux équations à deux inconnues), ce type de stratégies semble masqué ou ignoré par P1 en situation de classe. En effet, même si l'enseignante laisse vivre un peu le registre numérique, elle n'aménage pas le passage arithmétique algébrique puisqu'elle « réinterprète » immédiatement les réponses d'élèves émergeant visiblement du cadre numérique, dans le cadre algébrique et ceci au travers de différentes techniques didactiques enseignantes, que nous détaillerons plus loin.

Ainsi dans l'activité 1, nous voyons l'enseignante reformuler les réponses d'élèves à caractère numérique au problème posé dans le cadre algébrique, en faisant intervenir les notions de couples (x, y) et d'équation, en évacuant toute problématicité au sujet de ces objets de savoir :

P: La question c'est ? Dénombrer tous les couples (x, y)
E3: Madame
P: oui
E3 : 1plus 9
E1 : 2+8
P: ne parlez pas ensemble, shut est ce qu'on peut avoir 2+8 ? Regardez les faces ne dépassent pas...
E5 : oui madame encadré entre 1 et 6
P : On va donc dénombrer ces couples
E : les couples 4,6 ; 5,5 ; 6,4
P : que peut-on dire de des couples ? Chaque couple vérifie l'équation....
E : 6+4 égal 10

De la même façon : en ce qui concerne l'activité 4 introductive des systèmes d'équations à deux inconnues qui offre également des possibilités de solutions arithmétiques « par essai-erreur », l'enseignant ignore cette fois les propositions d'élèves qui vont dans ce sens (ce qui paraît d'autant plus naturel qu'à ce moment de l'étude aucune technique algébrique de résolution des systèmes d'équation n'a été introduite) pour imposer d'emblée une technique algébrique, qui se rapproche de la technique par élimination (alors même que ce n'est pas celle qui apparaît comme la plus pertinente) :

P : maintenant on va chercher N et R, les valeurs de N et R doivent vérifier la 1ére et la 2éme équation, ce sont les mêmes nombres
(Le silence règne dans la classe, P reprend)
P : une idée ? On veut trouver R et N, vous avez un nombre bien déterminé de boules rouges et un nombre bien déterminé de boules noires dans la boite, ce nombre ne va pas changer, comment faire pour trouver ces nombres ?
E5 : on peut simplifier madame ?
E3 : on choisit des nombres
P : donne-moi une façon pour passer au tableau.
E2 : la somme madame
P : shut...suivez, on obtient quoi, on fait 3N plus 4N égal R-3 plus R+4 , 7N égal 2R +1, une équation qui a combien d'inconnue ? on veut obtenir R tout seul et N tout seul. C'est clair ou non ?
E : non
p : vous essayez de trouver une équation qui a une seule inconnue ou bien R ou bien N essayez de trouver.

### II.1.2.2 Concurrence inégale entre une technique algébrique et une technique graphique dévalorisée

Au sein du thème « système de deux équations à deux inconnues », une seule activité était destinée à l'origine à introduire la technique de résolution graphique. La technique graphique n'est pas vraiment mise en avant par P1 : de manière d'ailleurs assez conforme au manuel, elle ne fait pas de discours d'explicitation sur cette technique de résolution. L'enseignante se contente de demander à l'élève envoyé au tableau d'accomplir une succession de tâches isolées correspondant à une reprise/mobilisation de techniques étudiées au préalable au sein des thèmes d'étude « fonctions linéaires et affines ». La technique de résolution graphique reste donc assez faible.

D'autant plus, que suite à des difficultés d'échelle rencontrées par les élèves, l'enseignante sollicite finalement la technique algébrique de résolution pour valider la solution trouvée graphiquement.

p dicte à Amel qui écrit au tableau
p(x) et p'(x) désignent les prix à payer pour x séances respectivement pour la 1ère et la 2ème option.
2) p(x) = 5x
p'(x) = 28 + 3x
p : la première c'est une fonction..
E : linéaire
P : la 2ème
E : affine
Amel écrit : P : est une fonction linéaire ; p' : est une fonction affine.
P : vous savez bien que la fonction linéaire se représente par une droite, bon on va faire des tableaux de valeurs.

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| p(x) | 0 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| p'(x) | 28 | 31 |

P : ça suffit, 28 c'est trop ? Qu'est ce qu'on va faire, bon termine, shut…
E2: On prend –7 Madame
E3: -5
P: Quoi? On va payer des séances négatives?
P : le repère maintenant, commence en bas, il n'y a pas de valeurs négatives, shut…
P : Le choix du repère, bon termine de tracer, vous y pensez en même temps
Amel gradue les axes à l'aide de la règle
P : L'image de 0 c'est 28 comment on va placer 28 ? on peut se déplacer par 10 ! C'est mieux non ?
P : bon l'équation cartésienne de la première 1ère droite, on représente graphiquement l'équation de la droite :
D : y = 5x, la 2ème l'image de 0 est 28 attendez elles vont se couper en un point, est ce qu'on peut déterminer les coordonnées graphiquement puis par le calcul.
E : bouhaaa…..
P : graphiquement ? Appelons A l'intersection
E : 75
E3 : non madame c'est pas ça
P : il faut être précis, on peut ajouter quelques valeurs de x et ajouter d'autres points
P : qu'est ce que vous remarquez pour A
Bouhaaa
P : il doit vérifier la 1ère et la 2ème.Si x = 14 ? Silence

P écrit au tableau :
D : y = 5x
D' : y = 3x + 28
P : Il faut vérifier à la fois la 1ère et la 2ème, à la fois, les deux options sont équivalentes lorsque p(x) = p'(x).
P(x) = p'(x)
5x = 3x +28
On détermine 2x = 28
x = 14
Lorsque x = 14, cette valeur là, qu'elle est le montant à payer,
P écrit au tableau :
Pour x = 14
p (14) = 70
p' (14) = 3x14 + 28
= 70

De plus en dehors même de ces concurrences « inégales » entre techniques algébriques et autres techniques de résolution, contrairement à ce que l'on a pu dire auparavant sur le travail de mise en équation, l'activité liée à la résolution algébrique d'équations et de systèmes d'équations est fortement mise en avant par l'enseignante.

### II.1.2.3 Des techniques fortes

En effet, au fil des activités, les techniques algébriques font l'objet de diverses explicitations qui les rendent particulièrement fortes.

L'enseignante explicite systématiquement les sous-tâches à l'œuvre derrière les tâches convoquées par les énoncés, ce qui minore certes le travail autonome des élèves à leur sujet (nous y reviendrons), mais lui permet de tenir un discours sur les techniques, en introduisant parfois des éléments de savoir qui justifient ces techniques (au niveau technologico-théorique).

L'extrait suivant du protocole concernant l'activité 4 en témoigne.

E1 : on prend 3N sur 4N égal R-3 sur R +4
P : N disparaît, si on divise, peut être bien, on fait le rapport vous essayez, peut être bien.
P écrit au tableau :
N= (R-3)/3
N= (R+4)/4
P : on obtient deux équations équivalentes à la 1ére, N c'est le même N.
Il continue à écrire
(R-3)/3 = (R+4)/4
p : par suite on fait..
E : 3 fois..
P : produit des moyens égale produit des extrêmes ah..
4(R-3)=3(R+4)
4R – 12 = 3R +12
P : on obtient alors une équation à une inconnue, on continue
4R –3R= 12+12
R = 24
P : est ce qu'on peut trouver N ?
E : oui
P : on remplace dans l'une des équations (en montrant du doigt)
P : est ce qu'il y a d'autres méthodes ?
P : On remplace R dans la 1ére équation (en écrivant au tableau)
N = (24-3)/3 = 21/3= 7

On voit bien comment l'enseignante cadre fortement le travail effectué par un élève voire par lui-même au tableau tout en rajoutant des commentaires : « on obtient deux équations équivalentes à la 1ére, N c'est le même N. », « produit des moyens égale produit des extrêmes », etc. qui visent à décontextualiser les techniques mises en œuvre ou à en justifier l'usage en se plaçant à un niveau technologique. Ce discours enseignant qui rend « fortes » les techniques algébriques est récurrent au fil des observations conduites, la première année dans la classe de P1.

Une seule activité fait quelque peu exception : il s'agit de la première activité introductive de l'équation à deux inconnues pour laquelle aucune technique de résolution n'est finalement explicitée par l'enseignante. Les techniques numériques mises en œuvre par les élèves restant totalement muettes mais P1 ne revenant pas pour autant aussi explicitement à une résolution algébrique, se contentant de reprendre les réponses d'élèves données avec des lettres étiquettes (les plus « algébrisées » en apparence).

P : combien il y a de couples (x, y) tel que x +y =6
E2 : si x égal y égal 5
P : quelles sont les réponses possibles ?
E2 : x égal 3 y égal 13
E4 : x égal 2 y égal 1 4
P : Bon on va compter tous les couples

La « force » des techniques algébriques étudiées au fil des deux thèmes équation et système de deux équations s'accompagne d'une répartition spécifique du travail mathématique les concernant entre le professeur et les élèves.

### II.1.2.4 Un topos de l'élève lié aux connaissances anciennes, devenues mobilisables et une technique didactique de « guidage »

Dans toutes ces activités, même en ce qui concerne les techniques algébriques, l'enseignante accorde un topos qui reste certes assez restreint pour l'ensemble des élèves qui peuvent se contenter *a minima* de suivre les explications données au tableau.

Toutefois l'élève systématiquement envoyé au tableau par P1 (toujours volontaire) pour résoudre l'activité en cours, se voit accorder davantage d'autonomie dans le travail mathématique à caractère algébrique.

Pour une technique algébrique nouvelle, le découpage en sous-tâches reste pris en charge par le professeur qui dicte les différentes étapes correspondantes à cet élève. Mais si ces sous-tâches correspondent à la mobilisation de connaissances anciennes (comme la résolution d'une équation à une inconnue, représentation graphique de fonctions par exemple, traitement des expressions algébriques), l'élève volontaire est censé les accomplir sans l'aide de P1.

L'épisode retranscrit ci-dessous illustre bien cette répartition du travail algébrique entre l'enseignante et l'élève au tableau : charge au professeur d'indiquer les techniques en jeu (« vous simplifiez », « puis on regroupe les m et n », etc.), et à l'élève d'exécuter les tâches indiquées rencontrées auparavant au sein du domaine algébrique.

P fait passer un élève au tableau qui écrit :
1/3(m-n) - (m +n ) = 0
P : ça s'écrit aussi…continue
E3 écrit :
m/3 – n/3 –m – n = 0
P : vous simplifiez jusqu'à la fin puis on regroupe les m et n
E3 écrit m/3 – 3m/3 –n/3 – 3n/3 = 0
-2m/3 – 4n/3 = 0
P : on aurait pu écrire m-n = 3 (m + n) c'est plus facile encore bon alors ça s'écrit encore…
E3 écrit 2m + 4n = 0
P : simplifie encore
E3 écrit m + 2n = 0.

Les tâches laissées à la charge de l'élève au tableau concernent parfois des techniques algébriques très récemment rencontrées au sein des thèmes concernés, voire même de l'activité. A cette occasion, on voit ainsi le topos de l'élève « s'étendre » au fil de l'étude.

En d'autres termes, des techniques récemment rencontrées dans la classe comme par exemple la substitution algébrique mise en avant dans l'activité 2 autour des équations à deux inconnues, présente dans le topos du professeur est en train de passer dans « l'ancien » à la charge de l'élève comme on peut le constater dans l'activité 11 précitée. Et c'est cette dynamique ancien / niveau assez rapide qui engendre une évolution de la position élève dont le topos « s'étend visiblement ».

Ainsi, en ce qui concerne le travail algébrique, le mouvement topogénétique dans la répartition des rôles entre enseignante et l'élève au tableau se donne clairement à voir dans leurs interactions (d'autres élèves dans la classe intervenant parfois pour répondre aux questions de leur professeur ou plus spontanément pour aider leur « représentant volontaire »).

Notons que le discours tenu par l'enseignante prend alors parfois simultanément plusieurs fonctions : d'enrôlement de l'élève envoyé au tableau dans une nouvelle sous-tâche à accomplir, ou référant plus ou moins explicitement aux technologies sous-jacentes des techniques que celui-ci est en train de ou doit mettre en œuvre.

Si cette frontière entre ces deux fonctions du discours de P1 est relativement claire dans les épisodes précités, elle l'est parfois moins comme dans l'épisode retranscrit ci-dessous :

$\begin{cases} x = y + 5 \\ 3y + 15 + 2y = 6 \end{cases}$

E1 : on cherche y

P : shut…la première ça reste toujours, le système est équivalent à (seulement oralement)

E1 écrit

$\begin{cases} x = y + 5 \\ 5y = 6 - 15 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 5 \\ 5y = -9 \end{cases}$

P : c'est donc équivalent à (sans écrire l'équivalence)

E1 continue à écrire

$\begin{cases} x = y + 5 \\ y = -9/5 \end{cases}$

p : une fois trouvé y on remplace

E4 : x égal 27,26sur 5

P : comment ? Bon Ridha continue c'est 16/5, l'important maintenant c'est la méthode, on vérifiera après

P rajoute au tableau

$\begin{cases} x = -9/5 + 25/5 = 16/5 \\ y = -9/5 \end{cases}$

Le « équivalent à » répété à diverses reprises semble autant être là pour inciter l'élève à poursuivre au niveau de la résolution algébrique, que pour répondre à un souci de rigueur mathématique du professeur qui tient à préciser que les transformations engagées conservent l'équivalence sans que toutefois, il ait les moyens de tenir un discours technologique à ce sujet.

De même pour l'épisode ci-dessous :

P : shut, attendez shut, on prend le même système, on va changer de méthode, on va essayer de trouver un nombre par lequel on va multiplier la 1ére ou la 2éme de telle façon lorsqu'on va additionner les deux équations le 1er membre avec le 1er membre et le 2éme membre avec le 2éme membre, l'une des inconnues x ou y va être éliminée.

P : bon quel réel, on veut éliminer x, on multiplie par …

E1 : 3

P : on va multiplier la 1ére équation par (-3), on choisit nous même par (-3)

P écrit au tableau

Equivalent à

$\begin{cases} (-3) \times (x - y) = (-3) \times 5 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

E: la somme

P : attendez le système est équivalent à …, on choisit de façon à éliminer x et y

$\begin{cases} -3x + 3y = -15 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

P : puis qu'est ce qu'on fait ?

E : on ajoute madame

P : on obtient une équation qui lui est équivalente, -3x+3x ça s'en va…

P écrit

$\begin{cases} 5y = -9 \\ x - y = 5 \end{cases}$

On peut également voir dans ces deux épisodes : le rajout d'un ostensif (qui reste à caractère oral « est équivalent à ») comme si le non-ostensif auquel celui-ci renvoie (l'équivalence de l'ensemble de solutions de deux systèmes d'équations) allait de soi, et sans s'attarder plus sur cette notion « naturalisée », faute de moyens théoriques.

Cette façon de procéder de P1 se rapproche de ce qu'on observe à d'autres moments concernant le rajout d'ostensifs symboliques au fil de certaines activités.

### II.1.2.5 Le rajout d'ostensifs symboliques renvoyant à des non-ostensifs naturalisés : une technique didactique de l'enseignante

A plusieurs reprises, effectivement l'enseignante rajoute des ostensifs symboliques (liée au couple de solutions d'une équation du premier, ou à l'ensemble de solutions d'un système d'équations) comme si les non-ostensifs ainsi convoqués étaient transparents pour les élèves, sans s'y attarder davantage.

C'est particulièrement visible dans l'activité 1 au sein de laquelle l'enseignante se ressaisit des réponses à caractère numérique des élèves concernant des paires solutions de l'équation symétrique : $x + y = 6$, en les restituant sous formes de couples solutions sans aucune justification : notamment sans s'attarder sur les « couples symétriques » qu'elle rajoute d'elle-même à la liste donnée par les élèves :

P : quelles sont les réponses possibles ?
E2 : x égal 3 y égal3
E3 : x égal 2 y égal 4
P : bon on va compter tous les couples.
Ma roua écrit au tableau ce que p lui dicte : (3,3), (5,1), (2,4), (1,5), (4,2)
P : il y a cinq couples, à votre place, on passe à la $2^{ème}$ question essayez de répondre

Remarquons que d'après notre analyse *a priori*, la nature même de cette première activité pouvait inciter à ce type d'effets didactiques : puisqu'il s'agissait bien d'écrire les couples solutions de cette équation, sur la base d'un travail qui pouvait être mené dans le cadre numérique concernant la relation symétrique en jeu dans l'énoncé.

Toutefois, à partir de cette activité, P1 semble considérer que l'ostensif couple peut être manipulé de façon naturelle par les élèves : ainsi dans l'activité 3, l'enseignante sollicite la mise en forme des réponses d'élèves sous la forme de couples solutions.

P : Allons y on passe aux couples, par exemple …
E1 : m égal –2, n égal 1
P : donc le couple de coordonnées vous avez dit !
E1 : (-2,1)
p écrit au tableau les propositions des élèves : (-2,1), (-14,7)
P : Un autre, cinq couples on a dit
E2 : m moins 6, n trois

P : Vous êtes tous d'accord oui ou non ?
P : Bon vérification, vérifiez ! $-6 + 2 \times 3 = 0$
E3 : (-8,4)
E4 : (-4,2)
P : C'est tout cinq couples on a dit
E5 : (-20, 10)
P : C'est tout ? cinq couples.

D'ailleurs, sans que cette fois, le manuel officiel (considéré comme texte institutionnel du savoir à enseigner) n'y fasse référence, le professeur importe parfois d'elle-même des ostensifs renvoyant à des non-ostensifs transparents à ses yeux.[23]

Elle agit ainsi de même pour des ostensifs symboliques liés aux ensembles de solutions :

P: vous écrivez donc S égal quoi ?
E : le couple moins cinq deux
P : bien vous écrivez (elle écrit au tableau)
P : $S_{IR^2} = \{(-5,2)\}$
E :bouhaa…madame
P : taisez vous silence, je vous ai donné l'activité 9, vous l'avez faite ou non. ?

Soulignons que cet ostensif « $S_{IR^2} = \{\ldots\}$ » ne fait pourtant l'objet d'aucune attente institutionnelle liée à la réforme et n'apparaît nulle part. Ce qui peut expliquer la réaction peu agitée des élèves, rencontrée par l'enseignante qui l'introduit sans en dire un mot. Et pourtant, P1 en attendra bien un usage de leur part par la suite.

On peut interpréter ces rajouts répétés d'ostensifs symboliques sans introduction explicite ou problématisée des non-ostensifs correspondant de la part de l'enseignante, comme des héritages incontrôlés de la dimension ostensive des organisations de savoir algébrique enseignées par le passé (Réforme, Contre-Réforme).

Mais cette façon de procéder peut également correspondre à une technique didactique de l'enseignante, pour positionner clairement ses attentes dans le cadre algébrique et instaurer dés le départ un contrat algébrique en « réinterprétant » souvent des réponses numériques d'élèves dans ce cadre.

Cette introduction « naturalisée » d'ostensifs symboliques ne se heurte pas toujours à des résistances aussi clairement exprimées que dans l'épisode évoqué ci-dessus, de la part des élèves. Ceux envoyés au tableau tentent d'ailleurs d'eux-mêmes de les réutiliser par la suite, pour répondre aux attentes de l'enseignante, mais parfois de façon incontrôlée et confuse.

[23] Nous avons d'ores et déjà évoqué le « équivalent à » qui resurgit dans son discours sans qu'elle ne l'exige toutefois de la part de ses élèves.

Ainsi, à plusieurs reprises les élèves font fonctionner l'ostensif symbolique « couple » pour désigner ce qui relèverait d'une paire : c'est-à-dire sans prêter attention à l'ordre des éléments numériques composant le couple. Ceci traduit un effet de « décontextualisation abusive » liée à l'activité 1 au sein de laquelle la notion de couple a été introduite au travers d'une relation symétrique.

P écrit

$\begin{cases} 5y = -9 \\ x - y = 5 \end{cases}$

E2 : pardon madame à quoi égal y ?
E1 : y = -9/5
E3 : non x= -9/5
E4 : on peut changer, c'est la même chose
P : Quel est le problème, qu'est ce qu'on va résoudre ici, on a 5y = -9 suivez
P écrit

$\begin{cases} y = -9/5 \\ x = 5 + (-9/5) = 16/5 \end{cases}$

E4 : donc le couple (-9/5, 16/5) est solution du système
p : attention c'est le couple (16/5, -9/5) qui est solution du système, on peut noter S l'ensemble des solutions, attendez on va d'abord écrire.

Mais d'autres confusions apparaissent par la suite, révélant l'absence de significations données par les élèves aux symboles mis en jeu : Les effets de cette transposition didactique sont bien visibles dans le rapport à l'algébrique : les élèves reproduisent souvent des gestes formels sans aucune fonctionnalité.

E3 écrit au tableau après avoir résolu le système
$S = \{480, 320\}$
P : rajoute les parenthèses vérifiez …
E6 : pourquoi on ne met pas IR au carré madame ?
P : c'est pareil, c'est une solution unique
P rajoute $IR^2$
$S_{IR^2} = \{(480, 320)\}$
P : l'ensemble des solutions de ce système est formé par le couple quatre cent quatre-vingt, trois cent vingt
P : bien donc on trouve les valeurs de x et y
E2 écrit au tableau :
y = 320
x= 800- 320= 480
Donc (x, y) = {480,320}
E : S IR au carré madame
E2 efface et écrit $S_{IR}2$ = {480,320}
P : attention aux parenthèses. L'élève au tableau rajoute les parenthèses.

### II.1.3 Conclusions

Tout comme pouvait le laisser penser l'étude préalable d'un cahier d'élève de P1, les organisations de savoir mises à l'étude comportent de nombreux points de conformité apparents avec les praxéologies de référence. Nous avons mis en évidence pour les deux thèmes d'étude « équation à deux inconnues » et « système de deux équations à deux inconnues », une appropriation par l'enseignante de la structure macro de l'organisation didactique : une reprise d'un bon nombre d'activités proposées par le manuel selon le découpage et les moments de l'étude préconisés par l'ouvrage. L'enseignante reprend scrupuleusement les activités de découverte en suivant l'ordre indiqué. Les consignes sont suivies pas à pas en respectant les découpages préconisés sans rien rajouter. Elle se contente de diminuer le nombre d'activités sur les systèmes d'équations par rapport à ce qui est prévu dans le manuel officiel, or cela ne parait pas surprenant à la vue du grand nombre d'activités consacrés au second thème d'étude qui contrait à faire ce choix.
Toutefois, si le support du travail en classe est assez fidèle aux propositions du manuel officiel, la conformité des organisations mathématiques et didactiques enseignées au praxéologies de référence reste une conformité « de surface ». En effet, des différences significatives, avec les attentes institutionnelles se donnent à voir dans la pratique de P1 tant du côté des tâches mathématiques effectivement développées que du côté du topos de l'élève. L'activité mathématique liée à la mise en équation a priori convoquée par ce support est presque totalement masquée par l'enseignante. Le travail de modélisation comme on a pu l'observer tombe dans le topos de l'enseignante ; l'élève ne les assume pas en première personne, il lui est seulement demandé d'en suivre l'effectuation ; sa technique didactique est d'autant plus renforcée par l'absence d'une institutionnalisation de la technique de mise en équation même si elle apparaît plus loin dans la progression de l'ouvrage.

Ainsi, au fil de l'étude, le topos de l'élève est rendu quasi-inexistant et les techniques mathématiques sont rendues très faibles, voire muettes par le professeur à travers une gestion didactique tout à fait spécifique qui s'appuie sur un élève « porte craie » envoyé au tableau. Une exception toutefois : l'avant-dernière activité du thème consacré aux systèmes d'équations, qui peut être interprétée comme la volonté de P1 de conduire un travail sur la mise en équation plutôt en aval des organisations mathématiques consacrées à l'étude des objets de savoir algébrique indépendamment de leur dimension outil. Le rapport qui semble être développé par l'enseignante, à la mise en équation comme « une connaissance qui n'est pas un enjeu d'enseignement » semble d'ailleurs se confirmer par une quasi-absence du travail de mise en équations dans les sujets de devoirs visant à évaluer l'étude de ces deux thèmes. L'étude révèle plutôt un rapprochement avec des organisations de l'étude plus anciennes, et une forme de routine installée au niveau de sa pratique.

Il semble que l'expérience de l'enseignant et sa « culture didactique et mathématique » se trouvent pour une grande part à l'origine d'une absence de problématisation de la mise en équation et peuvent expliquer, relativement la stabilité de la composante médiative des pratiques. On peut interpréter ce phénomène selon plusieurs points de vues ( compte tenu des quelques données recueillies dans les entretiens post séquences et qui restent sujet à diverses interprétations) : le fait que ce travail de modélisation et de résolution de problèmes était un enjeu d'enseignement explicite au cours de la réforme précédente et que l'enseignante ne décode pas cette mise en parallèle des praxéologies mathématiques (dans ce cas l'analyse des contraintes institutionnelles qui pèsent sur les pratiques observées nous renseigne sur la composante institutionnelle ). Ou bien , que ce travail n'est plus considéré comme une finalité à atteindre à ce niveau scolaire ,d'autant moins que la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre peut paraître une étape déjà assumée par les élèves à leur entrée au lycée , ou encore qu'elle n'y voit qu'un habillage superficiel, conduisant à un travail de fond : celui de la résolution algébrique (expliquant en partie l'absence d'évaluation de ce type de tâche au niveau des contrôles, les composantes personnelle et institutionnelle permettent dans ce cas de compléter la restitution du projet de l'enseignante ).

Ainsi, si notre analyse révèle que la mise en équation est un point rendu aveugle au niveau des organisations mathématiques enseignées par P1 l'année 1, elle ne demeure pas le seul vide institutionnel perçu. On soulève plus généralement, l'absence de discours ou de gestes enseignant relatifs aux passages d'un registre de représentation sémiotique à un autre, à aucun moment ces passages ne semblent problématisés par l'enseignante. Alors même, que cet aspect du travail algébrique est mis en avant par la réforme à diverses reprises au travers de la mise en équation et de la résolution graphique. Toutefois l'analyse du manuel de cette époque dite « de réforme moderne » a montré, que les moyens de problématiser ces passages ne sont jamais donnés ou apparents dans le manuel officiel, les techniques de mise en équation restent

relativement faibles, et les dialectiques arithmétique algébrique et graphique algébrique sont peu prises en considération.
Mais l'étude menée sur les pratiques données à voir par P1 révèle des déséquilibres importants dans le jeu sur les registres. Ces derniers apparaissent pour autant comme non-conformes aux organisations de savoir mathématiques apprêtées au sein du manuel officiel, notamment une dialectique graphique –algébrique faussée, et des techniques numériques masquées. Elles rendent l'algébrique encore plus prépondérant au niveau des organisations mathématiques développées ce qui n'était pas initialement pensé par les auteurs de l'ouvrage scolaire. Ceci est confirmé par la nature des tâches évaluées dans les contrôles, qui restent de nature purement algébrique.
Cette absence d'enjeu sur les passages d'un registre à un autre, possède un effet sensible sur la dimension sémiotique des organisations mathématiques, notamment par le rajout non problématisé d'ostensifs avec une illusion de transparence.

Pour sa part, le mouvement topogénétique associé au travail algébrique, même s'il paraît en dessous de celui suggéré par la structure « moderne » du manuel (avec de nouvelles organisations didactiques comme les activités introductives suggérant plus de place pour l'activité des élèves en classe) suggère tout de même une extension du topos de l'élève. Ce déplacement topogénétique vers l'élève apparaît dans la dévolution d'une partie des tâches préconisée. L'élève au tableau met en œuvre de manière autonome des connaissances anciennes rencontrées, soit au cours de thèmes précédents, soit au cours d'un même thème d'étude. Du coup, une dynamique ancien/nouveau du processus d'apprentissage apparaît entre l'exposition des connaissances et leur mise en fonctionnement.
Quoi qu'il en soit, la répartition des rôles entre enseignant et élèves vis-à-vis des savoirs engagés reste assez similaire d'une séance observée à l'autre : le topos de l'élève se résume à *maxima* à la mobilisation de techniques algébriques déjà étudiées suivant un découpage prédéterminé par l'enseignante. Ce qui est loin de l'organisation de l'étude visiblement attendue par les auteurs du manuel officiel, qui sous entendait un important déplacement topogénétique « vers l'élève » au fil des activités introductives proposées.
Nous poursuivons cette analyse de la pratique de P1 l'année 2 d'application de la réforme en nous intéressant plus particulièrement à ces éléments de non-conformité apparents avec la nouvelle réforme et en nous interrogeant sur l'évolution de la pratique du professeur.

## II.2 Evolution des pratiques de P1 : Seconde année d'enseignement de la réforme

Nous analysons les organisations mathématiques et didactiques effectivement mises à l'étude par P1 la deuxième année en décrivant et en interrogeant les principales évolutions constatées dans la pratique de l'enseignante.

Des premiers changements dans l'apprêtage des organisations mathématiques concernées ont été signalés à l'occasion de notre analyse *a priori* (qui a considéré d'emblée les situations relatives aux activités choisies par P1 l'année 1 et l'année 2).

L'enseignante conserve les trois premières activités du manuel liées aux équations à deux inconnues mais y rajoute une nouvelle activité que l'on va numéroter *3 bis* puis un exercice sur la résolution graphique qui ne figure pas dans le manuel.

Elle conserve également le choix des activités 4 et 11, destinées à l'étude des systèmes d'équations à deux inconnues, rajoute les activités 5 et 6 du manuel et élimine l'activité 9 choisie l'année précédente.

Nous reviendrons plus tard sur les raisons potentielles de ces choix. Nous rejoignons dans ce sens les propos de Robert « *les choix des enseignants pour une classe donnée ont une certaine récurrence qui n'est pas aléatoire : à nous de la décrypter et d'en déceler les variabilités intra et inter -enseignants.* »(Robert 2007, p 281).

### II.2.1 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la mise en équation

#### II.2.1.1 Une stabilité des pratiques par rapport aux tâches relatives à la mise en équation

Les recherches menées par Robert (2002) sur les pratiques enseignantes, plus particulièrement pour trouver des régularités et des variabilités, par exemple sur la manière dont les professeurs intègrent les contraintes institutionnelles permettent de mettre en exergue des régularités dans la pratique de P1. Ces régularités étaient déjà repérées sur l'ensemble des protocoles de P1 l'année 1 d'application de la réforme et semblent encore se confirmer l'année 2 indépendamment de la classe, pour un même contenu en rapport avec la mise en équations. Ainsi l'évolution constatée semble aller vers le sens d'une stabilité de la pratique de P1, qui se marque pour nous par l'existence d'invariants sur le plan des organisations mathématiques et didactiques que de la gestion enseignante.

***<u>Une régularité de l'organisation et du déroulement</u>***

La première routine observée chez P1 est celle liée au déroulement et à l'organisation des tâches définies à partir des énoncés des activités. L'enseignante continue en effet, à suivre fidèlement les consignes suggérées par le manuel au fil des activités convoquant plus ou moins explicitement des tâches liées à la mise en équation.

Ainsi sur la totalité des activités choisies au sein du thème « équation à deux inconnues » et du thème « système de deux équations à deux inconnues », P1 procède en suivant à la lettre les formulations et le découpage du manuel, comme on peut le constater sur cet épisode, qui a une proximité frappante avec ce qu'on a pu observer pendant la première année d'application de la réforme :

P : bon on commence, qui veut lire ?
E : madame madame
P : oui, mourad
Mourad lit l'énoncé et la 1$^{ère}$ question de l'activité
P : quelqu'un au tableau
M : madame
E1 : oui Imene , tu passes au tableau
P dicte à Iméne qui écrit au tableau
P : Soient x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face des deux dés alors la relation entre x et y est définie par : $x + y = 6$
p : bon la 2$^{ème}$ question qui répond ?
E : madame, madame

***<u>Une régularité au niveau des organisations mathématiques</u>***

Une seconde routine observée chez P1, l'année 2 est celle liée aux organisations mathématiques autour de la mise en équation. Au fil de ces activités convoquant ce type de tâches, on ne constate guère de changement dans l'organisation de l'étude du travail de modélisation, par rapport à l'année 1. C'est-à-dire que sur la quasi-totalité de ces activités (activités 1, 2, 3 et 4) au sein des thèmes « équation à deux inconnues » et « systèmes d'équations », tout comme l'année précédente, les techniques de mise en équation persistent à être muettes ou invisibles.

Même pour la nouvelle activité 3 *bis* nouvellement introduite par l'enseignante, alors même que les sous-tâches de mise en équation ne sont pas triviales, P1 ne rend pas visibles les techniques de conversion en jeu.

Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme augmenté de 2. Représenter graphiquement l'ensemble des couples de nombres qui répondent au problème.

P : alors, on commence, qui n'a pas compris d'abord, lisez tout d'abord
E madame, madame
P: Manel va-y
Manel lit l'énoncé et p la fait passer au tableau
Elle écrit ce que p lui dicte :
P: d'abord, on désigne par x et y les deux inconnues
Mise en équation :
2(x+y) -3 = 3(x+y) + 2
P : et par la suite ?

Ce type de tâche et les techniques associées continuent également à être absents de l'évaluation de l'enseignante tant au niveau des devoirs de contrôle que des devoirs de synthèse. (cf. annexe chapitre C3)

***<u>Une topogénése stable</u>***

Les pratiques de P1 par rapport au partage des rôles vis-à-vis de ce type de tâche apparaissent d'une remarquable stabilité, le topos de l'élève reste globalement faible, au fil des interactions publiques. L'enseignant continuant à prendre en charge la totalité du travail mathématique concerné sans discours ou échanges avec les élèves sur les techniques convoquées. L'extrait suivant de transcription sur les systèmes d'équations le montre bien:

P : vous lisez tout d'abord l'activité, les élèves lèvent le doigt pour lire, P envoie un élève (Amine) au tableau après 2minutes
P : met d'abord premièrement mise en équation
Amine écrit la première équation 3N = R -3 et s'arrête
Un élève intervient
E : quadruple c'est 4 madame ?
P : tu écris 4N= R + 4

***<u>Une régularité de la gestion didactique</u>***

Cette enseignante met en place une gestion très organisée et répétitive qui rejoint celle que nous avions repérée l'année 1 autour du même type de tâches. On observe une technique de gestion didactique des situations proposées en utilisant le même panel de gestes professionnels : faire lire l'énoncé aux élèves, envoyer un volontaire au tableau et lui dicter immédiatement la réponse. Il apparaît ainsi une régularité de l'organisation didactique chaque fois qu'il s'agit d'aborder une mise en équation indépendamment de la nature de la situation convoquée par l'activité. De plus, et tout comme pour l'année1, à aucun moment de l'étude nous avions observé un geste d'institutionnalisation de la technique mathématique.

P : on passe à la deuxième question qui lit ?

E : madame
P : oui Amel
Amel lit l'énoncé de la deuxième question de l'activité
P : bon l'équation, on l'écrit, qui passe au tableau ?
E2 : madame
P : vas-y, vous écrivez
P dicte à E2 qui écrit au tableau
La relation entre x et y est x + y = 10
P : bon vous cherchez maintenant tous les couples qui vérifient cette relation
E4 : huit deux madame
P : c'est juste ?
E1 : c'est des dés madame, pas plus que 6
E3 : quatre six madame

## *Un effet de contrat de nouveau repéré chez les élèves*

Les routines observées chez P1 sur l'ensemble des protocoles de l'année 2, et qui mettent particulièrement en jeu la stratégie du professeur ont des effets sur les apprentissages des élèves. Même si nous ne disposons que de très peu d'éléments concernant leurs activités en classe, elles peuvent en effet provoquer des malentendus chez les élèves ou créer des illusions chez l'enseignante. Ces effets peuvent être interprétés comme des inférences du contrat didactique que le professeur instaure de manière implicite chaque fois qu'il s'agit d'aborder ce type de tâche. D'ailleurs, tout comme pour l'année précédente des effets de cette gestion se donnent à voir pour une grande part, lors du déroulement de l'activité 2 autour des équations à deux inconnues. L'élève au tableau néglige d'écrire une relation algébrique correspondant à l'énoncé « le nombre de cassettes est le double de celui de CD » et substitue directement dans l'équation le « 2y » correspondant : il rend invisible la sous-tâche correspondante qui n'a jamais été effectuée autrement que sous la dictée de l'enseignante, et qui ne relève donc pas *a priori* de son *topos,* ou ne lui semble pas importante. P1 se voit dès lors contrainte d'expliciter elle-même cette sous-tâche :

E l'enseignant lit la troisième question de l'activité puis tourne dans les rangs pour observer le travail des élèves (il fait une remarque à certains élèves à propos de la relation : attention lisez bien est ce que c'est x= 2y ou y= 2x ?)
E : madame, comment on trouve x et y on n'a pas x ici
P : réfléchis, on t'a donné une relation entre x et y alors ?
E4 : ça ne donne pas x madame, seulement une équation à une inconnue y.
P : bon on va voir allez qui passe le faire au tableau ?
E6 : madame
P : Ichrak au tableau
E6 : écrit au tableau : 2,5 × (2y) + 15 y = 100
P : vous êtes d'accord ?
E : oui madame
P : mais il faut d'abord écrire que x = 2y, le nombre de cassettes est le double de celui de CD.
L'élève au tableau écrit machinalement la relation x = 2y puis revient aussitôt au travail algébrique autour de la résolution.

*« La sourde oreille » de l'enseignante : un cas de discordance*

Comme pour l'année 1, nous n'avons que peu d'éléments sur l'activité des élèves, ceci est en partie lié à une gestion enseignante que nous pouvons qualifier de « magistrale déguisée », qui ne laisse guère de place pour l'activité privée de l'élève en situation de classe et très peu de place à l'élève au tableau. En effet, comme le souligne Chevallard (1997, p .35) « Le cours magistral bannit en particulier le corps à corps didactique avec les élèves. » .Toutefois l'épisode transcrit ci-dessous au cours duquel P1 a laissé un peu plus de temps aux élèves, afin de démarrer individuellement l'activité 5 (sur le thème des systèmes d'équations) révèle qu'en absence de techniques de mise en équation explicitées au préalable, les élèves investissent « différemment » ces techniques mathématiques : en faisant pour certains des erreurs de conversion, en utilisant d'autres lettres que celles pourtant indiquées par l'énoncé de l'activité (m et n). Malgré le fait que ces différences sont rendues visibles (au travers notamment des interventions d'élèves à l'oral ou de son passage dans les rangs), P1 les ignore et se contente d'envoyer un élève qui a écrit le système d'équations attendu : L'extrait de transcription ci-dessous révèle également un cas de discordance : P1 ne semble décidément prêter guère d'importance au travail de mise en équation, pourtant toujours suggérées par les activités du manuel comme si elle se « protégeait » quelque part des incidents pouvant survenir et pouvant l'éloigner de son projet d'enseignement ,la résolution algébrique des systèmes d'équations.

P : allez faîtes l'activité 5, vous lisez Jaouani
Jaouani lit l'énoncé
E2 : comment madame.
P : réfléchissez, mettez le problème en équations
E3 : comment a chacun d'eux ?
P passe dans les rangs et observe le travail des élèves voici quelques propositions évoquées oralement

$\begin{cases} m+n = 96 \\ m = 2(n+78) \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = 96 \\ 2a = (b+78) \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 96 \\ (x+78) = (y + 78) \times 2 \end{cases}$

P fait passer un élève au tableau qui écrit seul le système attendu

$\begin{cases} m+n = 96 \\ m+ 78= 2(n+78) \end{cases}$

P : Bien suivez les étapes de l'activité
E3 : madame j'ai pas fait ça avec la 2ème est ce que c'est la même chose ?
E4 : non
P : quoi non, il faut le faire
E3 : j'ai écrit n+78 = 2(m+78) ; je ne trouve pas le même couple.
P : silence, écoutez, 2ème étape écrivez

L'élève au tableau poursuit la résolution par des écritures séparées

$\begin{cases} m= 96 - n \\ 96 - n +78 = 2n + 156 \end{cases}$

Sig

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ 3n = 78 + 96 - 156 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ 3n = 18 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ n = 6 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m = 90 \\ n = 6 \end{cases}$$

Donc $S_{IR^2} = (90,6)$

P revient ensuite sur le travail de l'élève au tableau, il rectifie les écritures algébriques en explicitant la méthode de résolution des systèmes par substitution.

### II.2.2 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la résolution

La place prépondérante occupée par praxéologies mathématiques liées au travail algébrique lors de l'année 1 semble encore renforcée à l'occasion de l'année 2.

Globalement, on retrouve beaucoup d'éléments communs dans l'organisation de l'étude des techniques algébriques, élaborée par P1 au sein des thèmes « équation à deux inconnues », « système d'équations ». On revoit notamment une façon enseignante de procéder quasi-identique liée à la répartition des rôles entre élèves et enseignant : avec le topos de l'élève « guidé » par P1 au tableau concernant uniquement des connaissances anciennes (liées au calcul algébrique étudié auparavant pour les premières activités du premier thème), mais qui s'étend visiblement au fil de l'étude, en intégrant de nouveaux éléments des techniques algébriques, qui viennent d'être enseignés.

Mais à l'occasion de cette deuxième année d'observation, P1 semble davantage assumer cette prépondérance donnée au travail des techniques algébriques en aménageant cette fois davantage le passage entre différents registres de représentations sémiotiques au fil des activités du manuel. Deux principaux types de changements sont évoqués, que nous explicitons dans le paragraphe qui suit.

#### II.2.2.1 Vers des dialectiques entre numérique, algébrique et graphique

***Un renforcement progressif de la technique algébrique***

Par exemple concernant la première activité au sein du thème « équations à deux inconnues », d'emblée, P1 organise la recherche numérique de solutions, en introduisant un tableau de valeurs qui fait apparaître des lettres les désignant. Ce qui lui permet d'une part de pointer plus explicitement les couples « symétriques » sans ambiguïté, d'autre part de justifier moyennant cette représentation en tableau tous les couples solutions de l'équation trouvée. Comme en témoigne l'extrait de transcription suivant :

P : bon la 2ème question qui répond ?

E : madame, madame...
P : oui mourad
E2: deux quatre
E3: cinq un
E4 : trois trois
Silence dans la classe
P : c'est tout pas d'autres valeurs pour x et y
E4 : on peut prendre quatre deux madame c'est la même chose
P : non ce n'est pas pareil pour x et y, on va faire un tableau, passe sana
P : tu fais un tableau, on prend toutes les valeurs possibles pour x par exemple et on écrit les valeurs de y tel que la somme donne 6
Sana remplit le tableau en collaboration avec la classe

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

P : combien de possibilités donc ?
E : cinq
P : on écrit donc les couples
P renvoie l'élève à sa place et écrit lui même au tableau en lisant
P : le couple (x, y) appartient à l'ensemble des couples.
$(x, y) \in \{(1,5) ; (2,4) ;(3,3) ;(4,2) (5,1)\}$.

P1 aménage ainsi un milieu plus raisonnable pour faire émerger la notion de couple que celui prévu initialement par l'activité.

Pour la seconde question de cette activité qui fait appel au même type de tâche, P1 met cette fois directement une technique algébrique en avant, malgré la volonté apparente d'élèves qui utilisent des stratégies numériques pour donner des valeurs qui satisfont à l'équation (somme égale à 10). L'enseignante anticipe ainsi sur son projet d'enseignement en orientant les élèves vers une transformation d'écritures algébrique leur permettant pour une valeur fixée d'une inconnue de retrouver la seconde comme on peut le constater sur cet épisode :

La relation entre x et y est $x + y = 10$

P : bon vous cherchez maintenant tous les couples qui vérifient cette relation
E4 : huit deux madame
P : c'est juste ?
E1 : c'est des dés madame, pas plus que 6
E3 : quatre six madame
P : oui on va écrire (il dicte à l'élève au tableau)
P : $x+y = 10$ donc $y = 10 - x$
p : combien de couples ?
E : trois madame

On voit bien comment lors de cette deuxième année d'observation dans sa classe, P1 n'hésite plus à mettre davantage en avant l'empan algébrique des organisations mathématiques mises à l'étude dans les activités qui pouvaient laisser un peu de place à des techniques numériques.

***Une décontextualisation de connaissances autour du travail graphique***

Une seconde variabilité repérée dans la pratique de P1 et constitue un point de rapprochement avec la nouvelle réforme est la valorisation de la technique graphique en ménageant cette fois le passage du registre algébrique au registre graphique .On peut constater sur l'activité 3 en rapport avec les équations à deux inconnues comment l'enseignante s'appuie sur la représentation en tableau et fait appel à la mémoire collective de la classe. P1 convoque chez les élèves des éléments technologiques (représentations graphiques des fonctions linéaires et affines) lui permettant de procéder à une décontextualisation des connaissances autour de la représentation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues :

Heithem remplit le tableau en collaboration avec les élèves de la classe

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| m | 3 | -6 | 0 | -2 | 5 |
| n | -15 | 3 | 0 | 1 | -2,5 |

P : la question c'est (il relit) qu'est ce qu'on remarque ?
E1 : fonction linéaire
P : quoi fonction linéaire ?
E : c'est une fonction linéaire, droite linéaire.
P : les points sont alignés
E4 : on peut inverser m et n ?/P : m abscisse, n ordonnée, regarde le couple qu'on t'a donné (m, n)
P : bon on va placer les points.
Heithem continue à tracer le repère au tableau, il place les points, les élèves suivent et effectuent la tâche à leur tour sur leur cahier.
P : on remarque que les points de coordonnées (x, y) sont alignés, ils appartiennent à la droite d'équation $n = -\frac{1}{2}m$, on veut généraliser/E1 : est ce qu'il faut que l'un s'écrit en fonction de l'autre pour que ce soit une droite ?/E2 : je n'ai pas compris madame la relation entre l'équation et le repère
P : on veut représenter l'ensemble des solutions (m,n) , qu'elle est l'équation, c'est n=-1/2m ou m= -2n , elles sont toutes équivalentes, on choisit quelques couples solution , est ce que le couple (2,-1) est solution ? E : oui.
P : comme on ne peut pas choisir une infinité de couples, on les représente dans un repère. Donc la représentation de l'ensemble des solutions de m=-1/2n est une droite, cette équation est à deux inconnues.

Cette évolution des pratiques de P1 va dans le sens des organisations mathématiques et didactiques attendues. On peut l'interpréter comme une régulation des pratiques de l'enseignante qui répond à des épisodes à résonance forte de l'année 2005-2006. Notamment, on peut penser que les difficultés rencontrées par l'enseignante à l'occasion des activités précitées (l'activité 1 sur les équations à deux inconnues, l'activité sur la résolution graphique d'un système) l'année précédente, ont été suffisamment sensibles et l'ont incité à modifier fortement sa gestion didactique autour de ces activités. Cependant on peut dire que l'enseignante ne va pas au-delà dans l'organisation mathématique autour de la résolution graphique. Il n'y a toujours pas d'institutionnalisation de la technique graphique tout comme dans le manuel officiel. Il semble donc que P1 maintienne une certaine conformité que nous pouvons qualifier de « surface » en ne rendant pas plus visible ce qui est invisible du point de vue institutionnel, ce qui concerne cette technique graphique.

#### II.2.2.2 Un discours technologico-théorique visant à renforcer les ostensifs symboliques

Cette nouvelle appropriation des activités du manuel pour laisser plus de place au travail algébrique va de pair avec un renforcement des ostensifs symboliques qui nourrissent un discours technologico-théorique davantage développé autour de la résolution algébrique d'équations ou de systèmes d'équations. L'attitude relevée peut s'interpréter en termes d'adaptation de l'enseignante qui s'approprie les activités du manuel et les adapte en prenant en compte son expérience de l'année 1, pour les mettre au service des enjeux didactiques, à savoir la mise en place d'un traitement algébrique des problèmes.
Ainsi dès la question 1 de la première activité introductive des équations à deux inconnues, l'enseignante prend la main pour écrire au tableau et fait intervenir des ostensifs ensemblistes d'appartenance et d'ensemble pour représenter les solutions.

P renvoie l'élève à sa place et écrit lui même au tableau en lisant
P : le couple (x, y) appartient à l'ensemble des couples ...
$(x, y) \in \{ (1,5) ; (2,4) ;(3,3) ;(4,2)\ (5,1)\}$

Un élève envoyé au tableau reproduit par la suite, dans la deuxième question, sous un effet de contrat la même écriture.

P : oui on écrit alors comme tout à l'heure (x, y) appartient à l'ensemble..
L'élève au tableau écrit
$(x, y) \in \{ (4,6) ; (6,4) ;(5,5)\}$

Concernant l'ostensif « couple », on voit comment l'enseignante a procédé ci-dessus pour en faire sentir davantage la signification du non ostensif associé en dépit des contraintes de la situation évoquée (relation symétrique).
Concernant l'ensemble de solutions d'une équation à deux inconnues et d'un « système d'équations à deux inconnues », elle introduit davantage d'ostensifs symboliques que l'année précédente et de manière beaucoup moins « cachée » : en assumant un discours technologico-théorique fort autour de ces ostensifs symboliques introduits à l'occasion

de l'activité 3 qui devient une occasion pour l'enseignante d'expliciter ce qui se cache derrière le produit cartésien $IR \times IR$ :

P : Pour $IR \times IR$, c'est quoi exactement, c'est un ensemble de couples
P écrit $IR \times IR = \{(x, y), x \in IR, y \in IR\}$
E: C'est quoi fois madame?
P : C'est pas fois mais c'est un produit cartésien d'ensemble, bon c'est une parenthèse, voila un document qui explique cela
P distribue aux élèves le document (en annexe), il demande aux élèves de le lire et donne la parole à un élève.
P : vous voyez on écrit aussi $IR^2$, ce n'est pas la multiplication mais c'est un ensemble de couples
P : Combien il y a de couples solution d'une équation à deux inconnues ? E : une infinité / P : bien, l'ensemble des couples solution d'une équation à deux inconnues est infini puisque x et y varient dans IR.

La encore on peut interpréter cette évolution dans la pratique de P1 comme en réponse aux difficultés rencontrés par les élèves, observables en situation de classe l'année précédente. Cela amène visiblement l'enseignante à anticiper l'année 2 sur les disfonctionnements pouvant survenir au niveau des apprentissages lors de la résolution algébrique des équations ou des systèmes admettant une infinité de solutions réelles. On pourrait également voir cet aspect comme une régulation au niveau de la pratique de P1 suite à des perturbations survenues l'année 1, l'amenant ainsi à modifier son action didactique dans le sens d'un renforcement des ostensifs symboliques.

P : comme on ne peut pas choisir une infinité de couples, on les représente dans un repère. Donc la représentation de l'ensemble des solutions de m=-1/2n est une droite, cette équation est à deux inconnues
P : on peut la résoudre algébriquement.
E : $S_{IR}$ madame
E2 : On cherche quoi ?
E : des ensembles
P : non des couples, les couples (m, n) appartiennent à quoi ?
P écrit au tableau :
$S = \{(m, n), m \in IR, n \in IR \text{ et } m + 2n = 0\}$
On peut également simplifier cette écriture
$S_{IR \times IR} = \{ (m, -\frac{1}{2} m), m \in IR \}$

Toutefois, ce changement ne semble pas aller dans le sens de la réforme moderne mais il apparaît plutôt comme un résidu « fort » des périodes d'enseignement antérieures vécues par P1, amenant à des convictions ancrées sur le savoir algébrique à enseigner : le travail algébrique *doit* comporter cette dimension symbolique.

Cette évolution marque ainsi un éloignement de l'organisation mathématique de référence prescrite par le manuel, et un rapprochement d'organisations mathématiques plus anciennes (Réforme, Contre-Réforme) dans les pratiques de l'enseignante.
Cela s'accompagne d'ailleurs d'une importance grandissante accordée au travail algébrique en soi qui va dans ce sens, l'enseignante allant au-delà des prescriptions

officielles pour envisager au fil d'exemples qu'elle importe elle-même, l'étude de trois cas possibles d'ensemble de solutions d'un système d'équations.

P : on a vu la dernière fois comment utiliser les méthodes de substitution et d'élimination et d'égalisation pour résoudre un système de deux équations, vous mettez activité
P : vous écrivez et vous commencez à résoudre
Résoudre dans $IR^2$, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2y = 4x + 6 \end{cases}$$

Les élèves se mettent à résoudre (3minutes)
E : je trouve 0 madame
E : il n'y a plus de x et y
E : c'est impossible madame , 0= 5
P : Attendez on va le faire suivez, Chaima au tableau
E6 : madame je n'ai pas compris la différence entre égalisation et substitution
P : c'est pas un problème, suivez votre camarade, elle va appliquer la méthode du livre
Chaima passe au tableau et écrit

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$3x + y = -1$
$y = -1 - 3x$
$3x + (-1-3x) = 4$
P : oui termine
$3x + -1 - 3x = 4$
$3x - 3x = 4 + 1$
$0 = 5$
Chaima : on ne trouve pas madame
P : si regardez
E1 : j'ai trouvé la même chose par élimination madame
P écrit au tableau vous avez trouvé en fait $0x = 5$ c'est quoi la valeur de x qui donne ça ?
E : impossible
P : bon ça veut dire qu'il n'y a aucun couple (x, y) qui vérifie les deux équations à la fois donc le système n'a pas de solution.
Vous écrivez $S_{IR}{}^2 = \emptyset$.

Pour la résolution algébrique, notons que les techniques mathématiques sont institutionnalisées par l'enseignante, qui reprend à la lettre les formulations du manuel officiel. De plus un intérêt particulier est accordé à l'équivalence des systèmes d'équations sans pour autant en faire un enjeu d'enseignement. L'enseignante guide l'élève au tableau dans la résolution du système considéré en étoffant sa production par un discours technologique visant à renforcer le travail autour de la résolution algébrique :

P : bien, lorsqu'on multiplie, attention n'oubliez pas de multiplier le $1^{er}$ membre et le $2^{ème}$ pour obtenir une équation équivalente, cette méthode de résolution est appelée méthode par élimination (elle l'écrit au tableau)
P : bien comment est ce système par rapport à l'autre ?
E :bouhaaa, multiplié ...
P : lorsque on multiplie les deux membres d'une égalité par le même réel, est ce que ça change ? Est ce qu'on obtient les mêmes solutions pour l'équation ?
E1 : une solution qui est...
P : la même, c'est la même chose pour le système, ils sont donc équivalents.
E : bouhaaa

P : bon tu continues, on demande de faire la somme qu'est ce qu'on trouve ?
Ouajdi continue la résolution
-14y = -2100
Donc y = -2100/-14
E : cent cinquante madame
P : bien y égal 150 comment maintenant trouver x ?
E : on remplace dans le système
P : dans l'une des équations
Ouajdi : laquelle madame ? (Elle montre les quatre équations)
P : la plus simple bien sûre pour faire moins de calcul puisqu'elles sont équivalentes
Ouajdi continue
5x + 2(150) = 3300
Sig 5x +300= 3300
Sig 5x = 3000
Sig x = 600
Ouajdi : j'écris S dans $IR^2$ madame ?
P : oui comme ça on voit bien le couple (x, y) solution du système.
Ouajdi ajoute $S_{IR}{}^2$ = (600,150).

### II.2.2.3 Un mouvement topogénétique relativement stable et une régularité de l'organisation didactique

Le topos de l'élève reste relativement faible sauf en ce qui concerne la mise en œuvre de techniques algébriques plus ou moins anciennes ou de certaines techniques récemment rencontrées et qui deviennent mobilisables dans des situations analogues. Dans ce cas une dynamique ancien / nouveau est retrouvée dans la pratique de p1 l'année 2. La résolution des sous tâches est en général prédécoupée par le professeur qui cadre fortement l'intervention de l'élève au tableau .Les calculs relativement simples ou faisant partie du répertoire des élèves sont laissées à leur charge cela parait être une règle du contrat didactique que l'enseignante impose et qui parait être un invariant dans sa pratique:

P : on passe vite alors, on va faire le troisième système avant, je vous laisse un peu de temps
3 minutes s'écoulent et p envoie un élève au tableau
P : tu vas résoudre le système, suivez les autres

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2y = 4x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 2(2x-3) = 4x + 6 \end{cases}$$

P : bien il n'a pas fait l'erreur de tout à l'heure continue
4x +6 = 4x +6
4x -4x = 6-6=0
E : donc x égale zéro
P : comment qu'est ce qu'on obtient
L'élève écrit au tableau
0 = 0 et s'arrête
P : x égale quoi ?
E2 : zéro
P écrit au tableau on a précisément 0 x = 0 c'est quoi la solution de cette équation ?
E3 : tous les réels madame
P : bon donc une infinité et y
E : on remplace madame
P : par quoi puisque x prend une infinité de solutions donc y aussi prend une infinité de valeur donc combien il y a de couple solution
E : tous les couples

P : attendez pas tous c'est les couples (il écrit au tableau)
$S_{IR}{}^2 = \{(x, 2x+3), x \in IR\}$.

# III. Conclusions

Plus encore l'année 2 que l'année 1, l'enseignante observée ne semble avoir aucun enjeu d'enseignement concernant la mise en équation de problèmes. Les organisations mathématiques pourtant convoquées par la plupart des activités choisies sont rendues totalement invisibles par sa gestion didactique : le topos de l'élève à ce sujet est inexistant (du moins publiquement), les techniques mathématiques impliquées restent muettes. La seule activité qui avait été l'occasion d'explicitations de P1 sur le travail de mise en équation l'année 1 (l'activité 9 qui convoquait la modélisation d'une relation de proportionnalité) a d'ailleurs été supprimée. On pourrait dès lors voir dans ce changement une régulation endogène de la pratique de P1, visant à masquer davantage les organisations mathématiques liées à la mise en équation de problèmes qui à ce moment de son enseignement ne sont pas un véritable enjeu de l'étude. Mais cette régulation ne va pourtant pas jusqu'à faire disparaître ces organisations de savoir sur la mise en équation (en proposant d'emblée des systèmes d'équations ou des équations à résoudre sans l'habillage concret ou numérique des activités du manuel) : sans doute par souci de conformité apparente avec les pratiques prescrites par l'institution au sein du manuel officiel, peut-être parce que malgré cette approche superficielle de la mise en équation, l'enseignante pense que les habillages peuvent motiver l'utilisation des outils algébriques. On peut dans tous les cas s'interroger sur les effets de cette pratique « pseudo-conforme » de P1 sur les apprentissages des élèves autour de la mise en équation.

Nos données ne nous permettent pas d'avoir de réponse claire à cette question. Mais au travers de certains épisodes, il semble toutefois que ceux-ci perçoivent qu'il ne s'agit pas d'un enjeu majeur de l'étude (puisque eux-mêmes rendent les techniques concernées muettes ou invisibles) et qu'en l'absence de repères didactiques, ils investissent ce travail de mise en équation dès lors de façon différentielle. Notons d'ailleurs, que l'absence d'une évaluation de ce type de tâche par P1 l'année 1 peut expliquer en quelque sorte l'absence d'une régulation sur sa pratique puisque très peu de feedback négatifs sont renvoyés à l'enseignante et sont susceptibles de perturber le déroulement stable de son projet d'enseignement. Autrement dit l'enseignante n'à aucune raison de percevoir les limites de son action didactique. Chevallard (1997, 1999) a déjà montré à quel point les évaluations dans une classe constituent un moyen de négociation avec les élèves, permettant à l'enseignant ou à l'enseignante de naviguer entre contraintes externes, amenant à certains contrôles (par exemple des exercices communs) et des contraintes plus internes liées à la classe , en amenant à élaborer d'autres types d'exercices (par exemples des exercices , faciles ou d'applications directes.)

L'absence d'indices sur la possibilité qu'il peut y avoir des problèmes, peut ainsi nous renseigner jusqu'à une certain point sur les routines repérées au niveau de la pratique et qui seraient des traces de la cohérence de la stratégie du professeur et des logiques qui régissent en partie sa pratique. **Qu'est-ce qui relève du non décodage ? De la non adhésion ? Serait –ce la part invisible des praxéologies mathématiques, côté institutionnel ? Est-ce la force de la culture mathématique de l'enseignante qui expliquerait cette non évolution de la pratique ? Est-ce une stabilité de la composante méditative si l'on se réfère davantage aux travaux de Robert (2002) ?**

Tout se passe comme si l'enseignante assumait la responsabilité de la mise en équation sans en faire réellement un enjeu d'enseignement et qu'elle séparait ce travail de modélisation de la praxéologie relative à la résolution, celle qui dans la culture de l'enseignante méritait à elle seule d'être dévoluée aux élèves et d'en faire un objet de savoir à enseigner. La question qui se pose : est-ce que c'est la gestion routinière repérée chez l'enseignante envers ce type de tâche qui l'empêcherait de s'adapter à un mode de déroulement inhabituel mais nécessaire ?

Selon les travaux de Robert (2002, 2005, 2007) la stabilité de la composante méditative des pratiques peut en effet être à l'origine de difficultés pour l'enseignante à adopter des exercices différents de ceux dont elle a l'habitude (d'ailleurs l'absence de tâches de mise en équation transdisciplinaires chez P1 confirme en partie ce propos). Comme le souligne l'auteure (2007, p.302) « Supposons un enseignant qui donne des exercices différents de ceux qu'il propose d'habitude. Par exemple il propose des exercices ou il faudrait laisser travailler les élèves qu'il n'en a l'habitude pour leur dévoluer réellement les activités attendues ; si la gestion habituelle de l'enseignante prend le dessus, il se peut que cela aboutisse à minorer les bénéfices attendus de l'introduction de ces nouvelles tâches et la raison en serait que l'enseignante n'aurait pas changé sa gestion du déroulement, pris par la force de la stabilité de ses pratiques. »

Quoi qu'il en soit, on peut s'interroger sur les éléments observables qui peuvent jouer le rôle d'un milieu antagoniste pour son activité. A l'issue de cette première année d'observation l'enseignante nous semble pouvoir disposer de peu d'éléments concernant par exemple le manque de visibilité des techniques de mise en équation pour les élèves ce qui pourrait expliquer en grande partie cette stabilité de la pratique la seconde année d'application de la réforme.

L'analyse que nous avions ainsi menée sur l'ensemble des protocoles d'observation ne révèle pas de changements spectaculaires, mais plutôt une régularité de l'organisation didactique qui laisse très peu de place à l'élève dans la réalisation autonome des activités d'étude et de recherche[24]. Mais les organisations mathématiques relatives à la résolution des équations et des systèmes d'équations font apparaître certaines évolutions, qui peuvent marquer une adaptation de l'enseignante à cette nouvelle réforme ,des évolutions qui peuvent tout aussi bien être « ***rapprochantes*** » de ce qui est prévu par les auteurs du manuel , notamment lorsque cela est rendu visible par l'institution que « ***éloignantes*** » des attentes pour des diverses raisons pouvant jouer un rôle déterminant dans ce « ***mouvement*** » d'ajustement des pratiques aux nouvelles conditions d'apprentissages.

Les évolutions « ***rapprochantes*** » de la réforme se donnent particulièrement à voir par les liens entre numérique, graphique et algébrique, qui semblent davantage problématisés l'année2 avec un passage d'un registre de représentation à un autre qui est amorcé en douceur au moyens de certaines représentations symboliques (tableaux, ostensifs symboliques, équation de droites). Cependant l'aménagement de ces conversions est souvent entrepris par P1 par un rajout d'ostensifs (ensemble de solutions, produit cartésien d'ensemble, équation cartésienne et réduite de droites...) qui ne font plus partie des organisations praxéologiques actuelles et qui fait que cette gestion enseignante l'éloigne de ce qui est préconisé. Cette distance des pratiques à la réforme semble s'accentuer l'année 2 par cette importance nouvelle accordée au discours théorique d'accompagnement de ces ostensifs. On peut supposer donc que le choix assumé de P1 montre que l'enseignante se dote de règles d'actions, qui lui permettent de faire face aux contraintes situationnelles. D'ailleurs cette logique d'action parait renforcer davantage l'empan algébrique déjà prépondérant l'année1, au détriment

[24] Ce constat se rapproche d'ailleurs de ce qui a été mis en avant dans le contexte français par le projet AMPERES(Apprentissages mathématiques et parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire)(2007) « la majorité des « activités introductives » des manuels, massivement reprises par les professeurs dans les classes, suivant en cela la forme dominante d'un enseignement sous forme d'ostension déguisée, « oublient » les questions fondatrices motivant les mathématiques et leur étude. Cet état de fait est conséquence de problèmes profonds qui trouvent leurs fondements dans la société pensant son école, la pédagogie qu'elle entend y voir pratiquée et la formation des professeurs. »

par exemple du travail graphique et de la modélisation qui restent absents des enjeux d'enseignement.

Comme nous l'avions déjà signalé, ce « mouvement » d'adaptation dans la pratique de P1 nous semble en grande partie liée à la part du « visible et de l'invisible » des organisations mathématiques et didactiques développées au niveau du manuel officiel et montre à voir des « polarisations » de l'enseignante autrement dit un mode de gestion exclusif sur une longue période d'un contenu d'enseignement particulier (stabilité de la composante médiative). Ces aspects contribuent fortement à faire bouger les pratiques enseignantes dans le sens d'une adhésion à la réforme ou d'une résistance au changement.

En effet dans le manuel tunisien, une part de l'organisation didactique attendue est donnée à voir alors que pour les organisations mathématiques, une part d'invisible dans la théorie pourrait expliquer l'action didactique de l'enseignante et sa réticence vis-à-vis de certains aspects du travail algébriques comme le travail graphique, la mise en équation ou encore l'équivalence logique des systèmes d'équations.

De plus, la gestion enseignante de la topogénése suppose qu'à certains moments, elle accorde à l'élève un espace vierge de toute présence professorale, où il soit autonome. Or dans son action didactique, bien qu'on perçoit des dynamiques ancien /niveau dans le processus d'apprentissage des élèves l'année 1 et 2 cet espace vierge demeure sur l'ensemble du panorama très limité et confiné dans une dimension « objet » de l'algèbre au travers de tâches isolées qui mettent en avant un accompagnement et un cadrage de l'activité de l'élève. Mais il est clair, dans cette étude de cas, que les techniques professorales répondent à plusieurs fonctions : l'accompagnement désigné ici répond tout autant à des fonctions chronogénétiques (instaurer un nouveau moment dans la séance) qu'à des fonctions topogénétiques.

Ainsi dans notre tentative de comprendre la rationalité de l'enseignante P1, nous sommes amenés à soulever de nombreuses questions sur la perméabilité ou l'imperméabilité des pratiques enseignantes à une réforme donnée.

On voit bien dans le cas de cette étude: comment tout en calquant son enseignement sur les organisations mathématiques et didactiques mises en texte dans le manuel officiel, une enseignante « détourne » une part importante de ces praxéologies de référence, soit parce qu'elles semblent prendre pied sur des routines de travail qui pèsent fortement sur l'organisation de l'étude : comme celles visiblement liées à la topogénése, soit parce que le professeur ne semble pas percevoir le projet didactique global ou épistémologique qui sous-tend ces organisations mathématiques ou didactique : projet qui comporte d'ailleurs toujours une part d'implicite. Ici quoique a priori sous-tendues par les activités ou les exercices du manuel officiel, les dialectiques attendues entre différents registres ne sont jamais explicites. On peut alors se poser la question de jusqu'à quel point elles étaient visibles la première année pour P1, l'évolution constatée la deuxième année montrerait une appropriation de cet aspect du projet d'enseignement de la réforme, par P1. On peut aussi interpréter ce phénomène en supposant que l'enseignante importe consciemment ou non des bribes d'organisations mathématiques d'anciennes réformes comme les ostensifs symboliques utilisés la première année comme s'ils allaient de soi. On voit lors de la seconde année d'observation, comment ce « décor » du travail algébrique fait sans doute partie d'une culture mathématique ancrée chez cette enseignante, puisque loin de revenir dessus la deuxième année, elle importe un discours technologico-théorique visant à en supporter l'usage par les élèves.

# Partie D

## Analyse des pratiques enseignantes

# Chapitre D1. Analyse des pratiques de l'enseignante P2

## Introduction

Dans le chapitre C, nous avons choisi d'analyser à une échelle macro les cahiers d'élèves de première année, considérant qu'il s'agit d'un premier indice des pratiques enseignantes dans le contexte précis d'un changement de réforme de l'enseignement secondaire tunisien. Parmi les cahiers étudiés, celui de *Ramzi* donne à voir des praxéologies mathématiques et didactiques, qui semblent plutôt fidèles aux praxéologies de référence de la « réforme contemporaine » à l'exception du lien, qui semble davantage renforcé entre les registres fonctionnel et algébrique et qui renvoie plutôt à des organisations mathématiques typiques de la « réforme moderne ». Les pratiques enseignantes correspondantes auraient fait l'objet d'adaptations importantes à l'occasion de la réforme précédente, mais ne franchiraient pas vraiment le cap des changements prescrits par la réforme actuelle. Afin de voir en quoi les pratiques de cette enseignante ont vraiment fait ou non l'objet d'adaptations, à la suite de la réforme moderne, nous avons choisi d'analyser finement les pratiques effectives du professeur concerné que nous nommons P2.

Dans ce chapitre, nous allons analyser la quasi-totalité des séances consacrées aux thèmes « équations à deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues » selon la même méthodologie décrite dans le chapitre C1 en s'interrogeant plus particulièrement sur la façon dont procède ce professeur pour mettre en place les organisations mathématiques autour de ces objets de savoir. Ainsi l'analyse des pratiques de P2 se pose à nous par le biais de questions en rapport avec l'adaptation enseignante à un changement curriculaire en terme de points de rapprochement ou d'éloignement de la réforme moderne et plus en avant en rapport avec la perméabilité d'une réforme par rapport à une autre.

# I. Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la mise en équation

## I.1 Des organisations mathématiques présentes tout au long de l'étude

L'enseignante P2 s'appuie sur les activités introductives du manuel officiel de la réforme contemporaine pour mettre en place les organisations mathématiques et didactiques autour des équations à deux inconnues et des systèmes linéaires. Ces activités ont déjà fait l'objet d'une brève analyse dans l'étude des manuels (chapitre B).

Au sein des organisations de savoir mathématique à enseigner, apprêtées par le manuel officiel, le travail de mise en équation accompagne l'étude des objets de savoir algébrique. L'enseignante reprend fidèlement les problèmes de mise en équation présents dans ce manuel en les écrivant au tableau :

I- Equation du 1er degré à deux inconnues
1) Activité
Quatre joueurs A, B, C, D se déplacent sur un terrain en essayant de former un rectangle de périmètre 100m

b) Que peuvent être les valeurs des distances AB entre A et B d'une part et BC entre B et C d'autre part ?
c) Si on pose x = AB et y= BC, quelle relation doit vérifier x et y ?

II- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
1) Activité
Dans une cage, il y a des poules et des lapins
1) Déterminer le nombre de poules et le nombre de lapins dans chacun des cas suivants
1er cas : il y a 16 pattes
2ème cas : il y a 6 têtes
3ème cas : il y a 16 pattes et 6 têtes à la fois
2) On désigne par x le nombre de lapins et par y le nombre de poules
Mettre le problème en équations dans chacun des cas envisagés.

La dimension « outil » de l'algèbre mise en avant dans la réforme « contemporaine » ne se limite pas aux activités introductives, mais elle apparaît aussi à d'autres moments de l'étude. De nombreux exercices d'application ou d'approfondissement convoquent également des tâches de mise en équation. P2 propose par exemple, certaines applications comme celle citée ci-dessous en tant qu'application visant à la fois un travail de la technique et un réinvestissement des connaissances autour de la modélisation d'une situation par un système de deux équations à deux inconnues. Le contexte concret évoqué semble se rapprocher des problèmes « classiques » généralement proposés dans le manuel de l'époque :

Application

On dispose d'une orange et d'une pomme de masses inconnues et de deux masses marquées 200gr et 300gr et d'une balance à deux plateaux
un premier équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, un 2ème équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre

1) Mettre le problème en système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.
2) Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui vérifient le système obtenu ?

(50,300), (250,150), (125,375), (150,350).

## I.2 Une technique de mise en équation qui évolue au fil d'une dialectique arithmétique - algèbre

Rappelons d'abord que les activités introductives du manuel officiel de l'époque présentent des tâches, qui mettent en avant une articulation entre les registres arithmétique et algébrique. Cette conversion entre registres sémiotiques paraît très présente et faire l'objet d'explicitations dans la pratique de P2 au fil des activités traitées. Ainsi dans la première activité, qui met en jeu un contexte géométrique (cadre des grandeurs) l'enseignante amène progressivement les élèves à formuler leurs réponses d'abord en langage courant, ensuite en substituant progressivement les inconnues par des grandeurs (mesures de longueurs) puis par des lettres. P2 convoque ainsi la technique de mise en équation en explicitant les tâches de conversion rendues accessibles par les élèves :

E1: 100 mètres Madame ?
P : oui le périmètre doit être égal à 100m
P : c'est quoi le périmètre d'abord d'un rectangle avant de passer ?
E1 : deux fois la longueur plus deux fois la largeur
P : tout le monde est d'accord ? Votre camarade vous dit le périmètre d'un rectangle d'une manière générale c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
E : oui...
E4 : le périmètre égal (AB+BC) x 2 = 100 donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50
P : nous passons donc à la 2éme question, si on pose x égal AB et y égal BC quelle relation doivent vérifier x et y pour toujours obtenir un périmètre égal 100
E1: on a x + y = 50
E2: (x+y) x2 = 100
P : oui d'autres relations ?
E5 : x×2 +y×2 = 100

## I.3 Des techniques de mises en équations « fortes » et explicites

***<u>Des stratégies arithmétiques valorisées :</u>***

Que ce soit au sein du thème équations à deux inconnues ou du thème systèmes linéaires, les organisations mathématiques enseignées prennent toujours appui sur le registre arithmétique avant de passer au formalisme algébrique. Dans cet épisode on peut voir comment l'enseignante convoque des stratégies de type arithmétique par essai erreur pour trouver les valeurs numériques correspondantes aux conditions stipulées dans l'énoncé. P2 valide les réponses des élèves en les synthétisant dans un tableau de valeurs comme en témoigne l'extrait de transcription suivant :

P : mais votre carré a ses deux côtés consécutifs égaux, c'est un carré mais comme même un carré c'est un rectangle, c'est donc une possibilité à envisager, on passe maintenant on écrira
P écrit tableau

| AB(m) | BC(m) |
|---|---|
| 30 | 20 |
| 15 | 25 |
| 40 | 10 |
| 25 | 25 |

Il existe une infinité de possibilités pour lesquelles le périmètre de ABCD est 100m.
P : bien sûr les distances AB et BC en mètres et la somme de qui ?
E1 : de AB et BC égale 50
P : la somme égale 50 tu viens de dire 50 !
E1 : on peut pas dire qu'il existe une infinité
P : est ce que vous avez entendu votre camarade, il vient de dire deux fois AB plus deux fois BC égale100 veut dire AB plus BC égale 50, vrai ou non ?
E : oui
P : dans ce cas là, si AB plus BC égale 50, les possibilités sont bien
E1 : limitées
P : limitées oui mais peux tu déterminer le nombre de possibilités ?
E1 : non
P : sachant que AB plus BC égale 50 peux tu déterminer le nombre de valeurs ?
E6 : une

Ces techniques arithmétiques engagées par les élèves bien qu'elles restent faibles[25] sont convoquées par l'enseignante, qui les relève et les organise au moyen d'un tableau. On peut voir comment au cours de la seconde activité introductive au système d'équations, l'enseignante prend l'initiative de valider une réponse d'élève par une vérification au moyen d'opérations élémentaires de multiplication et d'addition puis, sous l'effet du contrat explicite, les élèves valident à leur tour les réponses proposées :

P : Vous donnez toutes les possibilités pour chaque cas, alors on commence ? Je vous fais une remarque : la cage contient des poules et des lapins
E1 : il y a 2 lapins et 4 poules
P : vérifions si cette possibilité est vraie, un lapin a 4 pattes et une poule a 2 pattes
E2 : madame, 4x2=8 et 2x4=8 et 8+8 = 16
P : qui a compris ?
E3 : un lapin possède 4 pattes et une poule a 2 pattes 4x2+2x4=8+8=16
E4 : je n'ai pas compris madame

[25] Cela parait d'autant plus logique que les techniques engagées soient faibles du fait que les connaissances en jeu ne font plus l'objet d'enseignement : les technique arithmétiques (essai erreurs…) ne sont plus enseignées comme le souligne Coulange (2000) « les énoncés faisant intervenir des formules autrefois enseignées en arithmétique et des conversions de mesure ont disparu. Mais plus encore, ces problèmes n'occupent plus la même niche. Ils sont tout d'abord présents pour répondre à un besoin exprimé de retour au concret et de justification d'une utilité pratiques des mathématiques. Les activités préparatoires et les applications mettant en jeu de tels problèmes remplissent clairement cette fonction : prouver l'utilité des systèmes d'équations. »(p169)

P : envisagez d'autres possibilités, quoi encore ?
E5 : nombre de lapins 3 et de poules 2, 3x4=12, 2x2=4, 12+4 = 16
P : qui possède une autre possibilité ?
E6 : 1 et 6, 1x4=4, 2x6=12 et 12+4 = 16
P écrit :

| L | p |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 3 | 2 |
| 1 | 6 |

***Des techniques algébriques prenant appui sur le registre arithmétique***

Bien que la consigne de l'activité 2 prenne partiellement en charge le travail de mise en équation par une désignation des inconnues, l'enseignante s'assure que les élèves donnent une signification aux lettres déjà présentes dans l'énoncé :

P : bien, cette relation x+ y =50 est une relation d'égalité, somme de x et y égale 50, alors vous avez dans cette relation combien de réels à déterminer ?
E : deux
P : lesquels ?
E : x et y
P : donc ces réels on les appelle…
E : inconnues
P : bien x et y sont des inconnues de cette relation d'égalité, donc elle est appelée équation du 1^er^ degré à deux inconnues x et y.
P écrit au tableau
Cette relation entre x et y s'appelle équation du 1ér degré à deux inconnues
P : alors reprenons maintenant la 1ére question, le tableau, x pour vous c'est quoi ?
E : AB
P : et y ?
P : BC

***Des techniques évaluées***

L'importance qui semble être accordée à la mise en équation au niveau du rapport institutionnel et qui se reflète dans la pratique de P2 est renforcée par une évaluation bel et bien présente de ce type de tâches dans les contrôles. En effet, nous avons constaté la présence de problèmes « classiques », concrets ou issus du cadre des grandeurs ayant une certaine proximité avec les activités qui ont été proposées aux élèves en classe :

13 livres sont empilés les uns sur les autres, la hauteur de la pile est 45cm. Dans cette pile il ya des livres d'épaisseur 5cm et des livres d'épaisseurs 3cm. Trouver le nombre de livres de chaque sorte graphiquement puis par le calcul.

L'aire d'un rectangle de périmètre 36m ne change pas si on diminue sa longueur de 4 m et on augmente sa largeur de 3m.
Trouver les dimensions du rectangle.

Ce moment d'évaluation confirme le fait, que la mise en équation occupe une place importante au sein de l'organisation mathématique enseignée et qu'elle constitue un enjeu d'enseignement essentiel pour P2 dont la volonté d'initier l'élève à des pratiques de modélisation est manifeste.

## I.4 Un travail autour de la mise en équation laissé à la charge de l'élève

Au delà du fait que la mise en équation représente visiblement un enjeu essentiel d'enseignement pour P2, le caractère fort des techniques de mise en équation paraît également lié au partage des responsabilités entre l'enseignant et les élèves de la classe dans l'activité mathématique. Au travers des organisations mathématiques mises en œuvre, on peut constater que l'enseignante procède à un découpage des tâches suggérées conduisant les élèves à se détacher progressivement du contexte arithmétique et à donner du sens aux écritures algébriques. La modélisation des situations est quasiment toujours laissée sous la responsabilité des élèves, qui interviennent publiquement. On peut constater sur cet extrait de transcription la prise en charge par un élève (E2) de la technique par : choix des inconnues, désignation par des lettres et mise en équation. Mais P2 ne se contente pas de la réponse apportée et s'assure du découpage en sous-tâches :

P : la masse de l'orange et la masse de la pomme est égale à 500gr, qu'est ce que l'on a donc..
E2 : soit la masse de la pomme x et y la masse de l'orange on fait x plus y égale 500grammes
P : bien, pour vous x désigne la masse de la pomme donc pour vous cette masse est ...
E2 : inconnue
P : oui, y désigne
E : la masse de l'orange
P : bien sûr tout est en grammes, donc 1$^{er}$ équilibre vous avez dit
E : x plus y égale 500
P : bien, (P écrit au tableau) :
x désigne la masse de la pomme
y désigne la masse de l'orange
1ér équilibre $x + y = 500$
2$^{ème}$ équilibre $y + 200 = x$
E3 : x plus 200 égale y
P : c'est quoi y ? Relis le 2$^{ème}$ équilibre
E3 : un deuxième équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre.
P : la masse de combien
E3 : 200gr
P : qu'est ce que ça donnerait, relis
E3 relis l'énoncé
P : et la pomme sur l'autre donc $y + 200 = x$, ces deux inconnues à déterminer doivent en même temps vérifier un premier équilibre donc une 1$^{ère}$ équation et un 2$^{ème}$ équilibre donc une 2$^{ème}$ équation, x et y vérifient donc...
E4 : $x+y=500$ et $y+200= x$
P : donc x et y vérifient quoi ?
E4 : un système
P : quel système
E4 : du problème.

L'enseignante laisse à la charge des élèves l'identification des objets auxquels réfère le texte de l'énoncé et l'identification des relations que le texte de l'énoncé établit entre les objets auxquels il réfère. On peut constater dans cet épisode comment P2 problématise la mise en équation en valorisant l'activité cognitive complexe du passage du texte de l'énoncé de l'activité à l'écriture du système d'équations qui permettra de le résoudre.

## I.5 Une technique didactique de P2 qui problématise la mise en équation

Ce qui nous a semblé fort intéressant lors de nos observations, ce sont les régulations apportées par P2. Ces régulations se manifestent notamment par deux actions du professeur : l'accompagnement et l'analyse du travail de l'élève :

L'accompagnement de l'enseignante se donne à voir d'une part par la reprise systématique de l'énoncé. P2 commence toujours par accorder aux élèves un temps de réflexion individuel puis procède à des reformulations de la consigne :

P : alors je reprends, voilà la première question… et la 2éme on y reviendra, alors je vous donne quelques moments de réflexion pour me donner quelques possibilités.
Pendant ce temps P construit à la règle et au compas un rectangle ABCD.
E1 : Mettre le problème en système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
P : on commence d'abord par cette question, qui a réfléchi et donne une réponse… alors j'attends… nous avons une orange et une pomme de masses inconnues et deux masses, un 1er équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, ce 1er équilibre qu'est ce qu'il va nous donner ?

D'autre part, les mouvements d'accompagnement de l'enseignante apparaissent souvent dans le découpage de la consigne, qui permet aux élèves la production autonome de l'équation ou du système d'équations modélisant la situation évoquée par l'énoncé. L'enseignante finit par valider les réponses des élèves en présentant des traces écrites au tableau. Cette action de l'enseignante parait d'ailleurs indissociable de son action d'analyse et d'évaluation des réponses. Ainsi au fur et à mesure, que les élèves produisent les techniques de résolution du problème, qu'elles soient arithmétiques ou algébriques, P2 revient sur les interventions pour faire identifier des éléments pertinents comme par exemple les significations accordées à la désignation des inconnues, à l'équation ou au système proposé, à une solution donnée d'emblée par un élève et renforcer ainsi les techniques en jeu.

P : prenons les valeurs du tableau
E3: madame 2x+4y=16, pourquoi 2x
E4 : non madame 4x
E3 : 2x4 = 8
P: tu as dit tout à l'heure 4x
E3 : non madame x est le nombre de lapins
P : que représente le nombre 4x ?
E3 : le nombre de pattes
P : bien donc 4x est le nombre de pattes de lapins et y est le nombre de poules
P : quel est le nombre de poules ?

E : y
P : quel est le nombre de pattes de poules ?
E : 2y madame
P : la mise en équation alors ?
P écrit au tableau
Le nombre total de pattes est 16 donc
P : qu'est ce que j'écris ?
E : 4x +2y = 16
p : donc on vient de mettre le problème dans le 1^er^ cas en équations c'est une…
E : équation du premier degré à deux inconnues.

# II. Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la résolution

Nous mettons à présent en avant certaines caractéristiques des organisations mathématiques et didactiques mises en place par P2 autour de la résolution des équations et des systèmes d'équations.

## II.1 Des techniques numériques prenant systématiquement appui sur le registre arithmétique

Que ce soit pour le thème d'étude équations à deux inconnues ou systèmes d'équations, les activités introductives à ces objets de savoir font d'abord appel au registre arithmétique pour trouver le ou les couples de valeurs numériques solution d'une équation ou d'un système d'équations donné.

Ainsi la première rencontre avec l'objet de savoir à enseigner suggère de trouver cinq possibilités pour les distances AB et BC sachant que le périmètre du rectangle ABCD est 100 mètres. Le contexte des grandeurs mis en jeu permet aux élèves de mobiliser la formule du périmètre d'un rectangle et d'envisager des valeurs numériques solutions. En vue de faire distinguer aux élèves, sans l'évoquer, les couples de nombres solution, l'enseignante suggère un tableau de valeurs. Les élèves mobilisent ainsi des techniques arithmétiques faibles (par essai erreurs) qui sont accompagnées sous la convocation de l'enseignante d'un discours technologique explicite autour de la substitution numérique (2 fois la longueur plus 2 fois la largeur est 100).

P : avec ce qu'elle vient de vous donner essayez de trouver des valeurs de manière à obtenir ABCD de périmètre 100m, envisagez quelques possibilités pour la distance AB et la distance BC.
P : alors je vais commencer, je vais écrire sous forme de tableau
P trace le tableau

| AB | BC |
|---|---|
| | |

E2 : 30 et 20
P: qu'est ce que tu proposes? Bon voyons 30x2+20x2=60+40=100 donc ce sont deux valeurs qui sont convenables, d'autres possibilités ?
E1 : AB15 et BC 35

P: pourquoi?
E1: AB x 2 = 30 et 35 x2 = 70, 30+70=100
P: c'est bel et bien 100

L'enseignante fait avancer son projet d'enseignement en amenant progressivement les élèves à admettre qu'une « équation à deux inconnues » possède une infinité de solutions sans avoir recours à un formalisme algébrique particulier. Dans l'épisode suivant, le fait qu'un élève évoque une « éternité » de solutions paraît d'ailleurs assez révélateur du caractère abstrait de cette infinité de solutions pour eux, même si au-delà des valeurs numériques, elle met en avant la relation qui permet de caractériser cette infinité (sans toutefois la transformer en relation fonctionnelle qui aurait pu davantage éclairer cette notion d'infini).

P : à chaque fois que vous prenez une valeur de AB et une valeur de BC peu importe laquelle est la longueur laquelle est la largeur l'essentiel c'est d'obtenir un rectangle de côtés AB et BC tout en vérifiant le périmètre égal à 100
E5 : 40 et 10, $40\times 2 + 10\times 2 = 80 + 20 = 100$
P : Oui c'est vrai parce que ça vérifie bien, d'autres possibilités ? Combien y a t-il de possibilités ?
E : beaucoup
E1 : éternité
P : une infinité, y a t-il une possibilité particulière qui attire l'attention ?
E : AB égale BC
P: oui combien ?
E3 : 25

Les mêmes organisations mathématiques et didactiques se donnent à voir pour le second thème d'étude, l'enseignante continue à utiliser le tableau de valeurs pour faire retrouver aux élèves la solution du système proposé. Des techniques arithmétiques, par essai erreur sont mobilisées par certains élèves mais on peut constater le souci de l'enseignante d'amorcer en douceur le passage du registre arithmétique vers le registre algébrique malgré l'intervention d'un élève faisant intervenir l'outil algébrique. L'enseignante aurait très bien pu se saisir de cette intervention pour faire avancer son enseignement mais elle a préféré ménager cette transition :

P : bien maintenant vous voyez 6 têtes et 16 pattes en même temps, réfléchissez
E1 : 2 lapins et 4 poules
E2: vérifié -
P : comment cela ? Justifie
E2 $2\times 4=8$, $4\times 2=8$, $8+8=16$ et $2\times 2 + 4=8$
p : oui ça vérifie les deux conditions en même temps est ce qu'il y a d'autres possibilités ?
E1 : 4,2 madame (Farah)
P : combien de têtes, comment vous prenez ces possibilités ?
E : (en langue arabe) : commune madame
E0 : au hasard x puis je cherche y madame
P : tu passes ici à la résolution Achraf, on cherche des possibilités avec le tableau
E3 : dans les deux tableaux il y a 2,4 et 4,2

## II.2 Des techniques numériques qui évoluent au fil d'une dialectique arithmétique algèbre

En s'appuyant sur les propositions d'élèves, P2 développe une organisation mathématique qui permet une évolution progressive du statut de la lettre : celle-ci passant du statut de nombre inconnu fixé, au statut de nombre connu qui prend des valeurs dans un ensemble de nombres. Cette évolution du statut de la lettre semble sous-tendre le moment de l'étude : exploration du type de tâche résolution algébrique d'une équation à deux inconnues et l'élaboration de la technique correspondante.

Pendant cet épisode, l'enseignante commence par expliciter les stratégies arithmétiques mises en œuvre par les élèves, puis les amène peu à peu à se détacher du contexte arithmétique pour envisager des techniques de type algébrique (fixer la valeur d'une inconnue et rechercher l'autre), sans toutefois passer par le symbolisme algébrique (équation en x et y).

P : sachant que AB plus BC égal 50 peux tu déterminer le nombre de valeurs ?
$E_6$ : une
P : alors à chaque valeur comment tu fais pour trouver AB et BC ? Par exemple je prendrai Ahmed, comment tu as trouvé les valeurs 30 et 20, qu'est ce que tu as fait pour les trouver ?
P : tu as pris ...
E2 : la longueur du rectangle fois2 et BC 20x2
E5 : on peut prendre madame deux nombres qui sont égaux à 50
P : leur somme égale à 50 mais vos choix comment vous le faites ? vous tâtonnez comme ça
E : non...
P : est ce que vous prenez AB égal 30 puis je te pose la question à quoi doit être égal BC dans ce cas là , comment vous faites pour trouver AB et BC ?
E9 : les deux égal à 50
E4 : le périmètre égal (AB+BC) x2 = 100 donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50
P : oui et alors comment tu donnes tes possibilités ? Comment tu les choisis ? est ce que tu les prends en même temps ou l'un après l'autre ?
E2 : l'un après l'autre
P : bien tu choisis l'un après l'autre
E2 : AB =30, 30x2 = 60, le périmétre100-60 =40 donc BC 40/2 égal 20
P : pour déterminer vos possibilités vous posez une valeur pour l'un et vous déterminez l'autre en calculant en utilisant x pardon en prenant 2AB +2BC=100
Ou AB+BC= 50 ou encore (AB +BC) x2 = 100.

## II.3 Des techniques algébriques « fortes » à travers une évolution des ostensifs

***A propos du « couple de nombres » (x, y)***

Avant d'aborder la résolution d'une équation à deux inconnues, P2 commence par installer la notion de couple « solution » d'abord dans un contexte numérique à travers des techniques de substitution numérique en assurant le lien avec le registre algébrique.

Les élèves manipulent des valeurs numériques, l'enseignante « pose » la notion de couple comme lien entre ces valeurs numériques et l'équation donnée à résoudre :

P : alors reprenons maintenant la 1ére question, le tableau, x pour vous c'est quoi ?
E : AB
P : et y ?
P : BC
P : Bien alors pour le 1ér cas on a x =30 et y = 20, ces deux réels en même temps si je les remplace dans cette relation est ce qu'ils vérifient cette relation ?
E : oui
P : alors puisque 30 et 20 en même temps vérifient l'équation on dira (écrit cela au tableau)
Le couple (30,20) vérifie l'équation x+ y =50.

L'ostensif « couple » fonctionne ensuite au travers d'exemples qui visent à renforcer cette notion par la validation des couples de valeurs numériques proposées :

p : citez d'autres couples vérifiant l'équation, arrêtez d'écrire, s'il vous plait citez d'autres couples qui vérifient l'équation x+ y =50.
E6 : 15, 35
P : passe au tableau et écris ce que tu exprimes
E6 passe et écrit : le couple (15, 35) vérifie l'équation x+y = 50
P : bien d'autres couples..
E9 : 40, 10
P : passe au tableau
E9 passe et écrit : Le couple (40, 10) vérifie l'équation x + y = 50
P : voyons, bien, y en a t-il d'autres ?
E : (5,45), (25,25), (48,2)
P : d'accord moi je vous donne un couple, je prend le couple, laissez moi c'est mon tour de choisir, je prends le couple (22,34)
E4 : 56 madame
P : quoi 56
E3 : n'égal pas 50
P : alors on dira que le couple (22,34) ne vérifie pas l'équation, les couples cités, il y en a d'autres sont solutions de l'équation x+y = 50
P efface le tableau et écrit :
Les couples (30,20), (15,35), …qui vérifient l'équation x+y = 50 s'appellent solutions de celle-ci.

Au fil des tâches proposées par l'enseignante, le lien entre le numérique et l'algébrique apparaît clairement. Ce lien est explicité par l'enseignante à travers le rôle qu'elle fait jouer à la notion de couple, notion qui est introduite dans appareillage théorique fort, du type « théorie des ensembles » (tel qu'on a pu le voir ressurgir lors de la deuxième année de pratiques de P1). La tâche donnée ensuite à voir est posée dans le registre numérique, donc il n'est pas étonnant de constater l'apparition encore une fois de techniques arithmétiques justifiées par des opérations élémentaires de multiplication et d'addition :

Application
c) On considère l'équation 3x –y = 5.
Donner quelques solutions de l'équation.
P : pouvez vous me donner quelques solutions
E8 : (2,1)
P : est ce que tu as réfléchi d'abord ?

E8 : oui 3x2=6-1=5
P écrit :
(2,1) vérifie l'équation en effet 3x2 –1 6-1 = 5 donc (2,1) est solution de cette équation
E1 : (3,4)
P : oui le couple (3,4) est aussi solution
P : (1,7) est-il solution ?
E : non

Cependant, si l'enseignante semble ne pas vouloir brûler des étapes pour parvenir à une meilleure maîtrise des connaissances en jeu, cela n'empêche pas certains élèves de dépasser ce stade et de parvenir à une paramétrisation de la notion de couple de façon autonome. Cette intervention engendre ici un effet de résonance forte de la part de l'enseignante, qui se saisit de l'intervention de l'élève pour faire avancer le temps didactique et préciser ce qu'est exactement l'organisation mathématique élaborée :

E1 : le couple (a, b) est solution d'une équation, par exemple 3x+y=7 ça veut dire 3a+b=7.
P : reprend
E1 : le couple (a, b) est solution de l'équation 3x+y=7 équivalent 3a+b=7
P : qu'as-tu dis ? tu as remplacé (x,y) par (a,b)
E1 : oui
P : c'est une équation du premier degré à deux inconnues
P écrit au tableau
ax+by =c est une équation du premier degré à deux inconnues réels x et y
est ce que x et y sont des réels donnés ?
E : non, des inconnues
P : a, b, c sont des réels non nuls à la fois.

A ce moment de l'étude, l'enseignante décide de rompre avec le contrat local antérieur pour renforcer le contrat algébrique explicité .Elle problématise ainsi la recherche des couples solutions d'une équation à deux inconnues, en convoquant cette fois une technique algébrique permettant de résoudre ce type d'équation. :

P : je vous ai demandé de donner quelques couples solutions de l'équation 3x+y=5, je vous ai demandé comment vous faites pour choisir vos couples ? est ce que vous tâtonnez ? ou vous choisissez x et y
E2 : non, on choisit x puis on cherche y

L'intervention de l'élève est exploitée par l'enseignante (résonance forte) qui met en avant la technique à travers la tâche « calculer m et n sachant que les couples (m,-1) et (3,n) sont solution de l'équation 3x-y = 5» qui fait appel au type de tâche « pour une équation à deux inconnues donnée, trouver la valeur d'une inconnue connaissant la valeur de l'autre ». Les élèves rencontrent ainsi une occasion pour mettre à l'oeuvre des connaissances autour de la substitution algébrique et de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue afin d'accomplir la tâche demandée :

P : La deuxième question je vous dis les couples (m,-1) et (3,n) sont solution de l'équation 3x-y = 5, calculer m et n
E3 : 3m+1=5

P :vous allez résoudre par la suite , le couple (m,-1) est solution de 3x-y =5 d'abord la signification de cet énoncé ? Que signifie le couple (m,-1) est solution de 3x-y=5
E3 : $3\times m - (-1) = 5$
P : je reprends le couple (m,-1) est solution de 3x-y=5
E3 : $3\times m - (-1) = 5$
P : qu'est ce que tu as fais toi, tu as remplacé x par m
E3 : oui
P : alors reprend
E3 : 3m-(-1) =5 ça veut dire 3m+1 =5
P : c'est une équation à deux inconnues
P écrit au tableau ce que les élèves lui dictent :
3m-(-1) =5 équivaut à
3m+1= 5 équivaut à
3m= 5-1 équivaut à
3m=4 équivaut à
m = 4/3
P : alors maintenant le couple (3, n)

La dialectique arithmétique-algèbre relevée dans l'organisation mathématique développée par P2 autour du premier thème d'étude apparaît aussi dans l'étude des « systèmes d'équations ». Autrement dit que l'introduction d'objet de savoirs dans le registre arithmétique parait être une étape fondamentale dans la pratique de P2 pour parvenir à mettre en place un contrat algébrique. On peut voir dans cet épisode comment P2 motive la résolution algébrique en important des couples de valeurs numériques dont aucun n'est solution du système proposé. L'organisation mathématique conduite, semble vouloir montrer les limites du raisonnement arithmétique, pour résoudre des équations et des systèmes d'équations à deux inconnues. :

P : et le couple (125,375)
E4 : 125+200=325, 325 n'est pas égal à 375
P : vous avez suivi ?
E : non
P répète intégralement la proposition de E4
E : c'est faux madame
P : c'est quoi y ?
E : 375
P : 375+200=575, aucun couple donc n'est solution du système
P écrit au tableau :
Aucun des couples (50,300), (250,150), (125,375), (150,350) ne vérifie les deux équations du système à la fois
P : comment donc résoudre et trouver la solution ?
E2 : on remplace encore le couple
P : arrêtons de tâtonner, on va résoudre, bien...
P écrit au tableau :
Résolution du système $\begin{cases} x+y= 500 \\ y +200 =x \end{cases}$

## II.4 Des techniques de résolution de plus en plus« fortes » et une évolution de la dynamique ancien/nouveau au fil des activités :

La rupture du contrat arithmétique est clairement explicitée par l'enseignante, qui convoque des stratégies permettant de résoudre le système d'équation en question. Une technique algébrique émerge spontanément chez un élève autour de la substitution et P2 se saisit de cette intervention pour expliciter la technique, en convoquant les connaissances des élèves autour des équations du premier degré à une inconnue.

p : auriez vous une idée, arrêtez de tâtonner
E0 : on peut mettre x = y +200 puis je mets y + 200 + y = 500
P : suivons l'idée de votre camarade, ça va donner le système suivant
P écrit au tableau sous la dictée des élèves mais prend en charge l'organisation des écritures :

$$\begin{cases} y+200+y=500 \\ y+200=x \end{cases} \text{ équivaut à}$$

$$\begin{cases} 2y+200=500 \\ y+200=x \end{cases} \text{ équivaut à}$$

$$\begin{cases} 2y=300 \\ y+200=x \end{cases} \text{ équivaut à}$$

$$\begin{cases} y = 150 \\ x = 350 \end{cases}$$

E2: c'est quoi 2y +200= 500 ?
P : c'est quoi cette équation ?
E : $1^{er}$ degré à une inconnue
P : qu'elle est l'inconnue ?
E3 : y
E2: 2y madame
P: cherchons y.

Cette technique est réinvestie par P2 à la suite du moment d'institutionnalisation avant de passer aux techniques de résolution d'un système par égalisation puis par élimination. Dans cet épisode, l'enseignante s'appuie sur des connaissances nouvellement rencontrées par les élèves à propos de la technique par substitution pour introduire la seconde technique algébrique de résolution. De ce fait, nous constatons que, même lorsqu'il s'agit d'enseigner des techniques de résolutions, les tâches proposées ne sont pas travaillées de façon isolée mais plutôt selon une organisation de l'étude structurée qui semble contrôlée par l'enseignante : la technique par égalisation est par exemple présentée selon un découpage en sous-tâches : d'abord exprimer une inconnue en fonction de l'autre, égaliser les expressions algébriques trouvées et résoudre l'équation à une inconnue trouvée :

P : la méthode de substitution consistait à exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre

P : je vais exprimer y à l'aide de x , y égal quoi ?
E : 6 – x
P : faisons la même chose pour la $2^{ème}$
E0 : y = 8 – 2x
P : alors regardez , y c'est la même inconnue alors ?
E : 8 – 2x = 6 – x
E1 : madame une équation à deux inconnues
P : comment regarde bien
P écrit au tableau :

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 4x+2y=16 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

$$\text{Équivaut à} \begin{cases} 6-x = 8-2x \\ y = 8 -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 -8 = -2x +x \\ y = 8 -2x \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} -2 = -x \\ y = 8 -2x \end{cases}$$

Équivaut à x = 2 , y = 4
E : madame, je n'ai pas compris, moi aussi, rien…
P : je reprends, voilà ce qu'on a fait, on a exprimé y à l'aide de x dans la $1^{ère}$ et j'ai fait de même pour la $2^{ème}$ donc: 8 – 2x = 6 – x, jusque là vous avez compris
E : mmmm
P : alors c'est la résolution, suivez minutieusement
P relit ce qui est marqué au tableau (les systèmes)
E3 : pourquoi on a laissé y = 8 – 2x
P : on aurait pu aussi garder y = 6 –x, c'est pareil, remplace tu vas voir, y = 6-2 = 4
P : alors la méthode qu'on vient d'utiliser et qui consiste à exprimer à l'aide de x puis à égaliser s'appelle méthode par égalisation.

## II.5 Des techniques graphiques qui évoluent au fil d'une dialectique algébrique/graphique /fonctionnel

La dialectique arithmétique / algèbre mise en avant dans l'action de P2 lors de l'introduction des techniques algébriques de résolution des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations, semble constituer un point important chez l'enseignante, dans sa gestion des différents registres sémiotiques, intervenant au niveau des organisations mathématiques autour de la résolution. En effet, nous avons montré au cours des épisodes précédents, comment P2 aménage le passage du registre arithmétique au registre algébrique en mobilisant le registre des tableaux. L'intérêt accordé au travail graphique semble avoir la même importance chez l'enseignante qui non seulement aménage le passage de l'algébrique au graphique et inversement mais donne également du sens aux écritures algébriques à travers le graphique, en passant par le registre des fonctions affines. Dans l'épisode qui suit, l'enseignante met en place une organisation mathématique autour de la résolution graphique d'une équation à deux inconnues : elle commence par convoquer des couples solutions qui seront représentés dans un repère du plan. Le constat d'alignement des points se fait d'abord sur la base du dessin, puis un discours technologique fondé sur l'étude des fonctions affines vient appuyer la technique de résolution. P2 saisit cette occasion pour donner du sens à l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues (x variable)

S ={(x, -2x+3), x ∈ IR }, au travers de la représentation graphique. Du coup, une dialectique ancien/nouveau du processus d'apprentissage semble créer une dynamique au niveau des différentes techniques de résolution

P : l'ensemble des couples x, y et écrit au tableau :
S ={(x, -2x+3), x ∈ IR }
Car 2x+y = 3 équivaut à y = 3-2x
P : vous avez compris ?
E : non madame
P : je répète, comment vous avez trouvé le réel -1 pour le couple (2,-1)
E : on prend x=2 et on calcule y
P : et avec (4,-5), y= 3-2*4 = -5
E : bouahhh
P : donc l'ensemble des solutions est S (montre au tableau l'ensemble)
$E_0$ : pourquoi on n'a pas remplacé -2x + 3 par y
P : je peux le faire en précisant la relation entre x et y, en écrivant x à l'aide de y ou encore y à l'aide de x vous pouvez poser y et chercher x dans ce cas là on exprime x à l'aide de y bon lisez la question suivante
P : vous parlez depuis tout à l'heure de fonction, qu'est ce que c'est ?
E : c'est une fonction affine
P : et la représentation graphique
$E_0$ : c'est une droite
P : monte au tableau
$E_0$ écrit au tableau :f : IR→IR  x→ -2x + 3
Soit x =1 ; f (1) = -2 × 1 + 3 = -2 + 3 = 1
Soit x = 3
f (3) = -2 ×3 +3 = - 6 +3
= -3
P : continue : représentez, la question c'est représentez
$E_2$ : on fait un tableau madame
P : bien
(E0 réalise au tableau la représentation graphique )
p : la représentation graphique on l'a appelé
E : droite
P : qu'est ce qu'on peut déduire ? la droite D...les couples représentés tout à l'heure, il y a une infinité, et on a dit qu'en représentant ces couples, les points sont alignés
Cette droite qu'est ce qu'elle a ?
La droite qui représente f, qu'est ce qu'elle a ?
E1 : la droite D contient les points de tout à l'heure
P : donc D passe par les points que nous avons trouvé, reprenons
E et P : D passe par les points qui représentent les couples de 2x + y = 3
P : trés vite écrivez, on remarque que la représentation graphique de qui ?
E0 écrit au tableau : La représentation graphique de f passe par les points qui représentent les couples solutions de l'équation 2x + y = 3
P : et l'ensemble de solution
E2 : la fonction affine
P : je viens de trouver que la représentation graphique de f passe par les points solutions, on déduit...
P conclut et écrit :
On en déduit que la représentation graphique des solutions de l'équation 2 x + y = 3 est une droite.

Le travail engagé par P2 autour de la résolution graphique des équations à deux inconnues est investi au niveau de l'organisation mathématique autour des systèmes d'équations. On perçoit à nouveau une gestion enseignante qui met en valeur le travail graphique par un aller retour entre les registres algébrique et graphique tout au long de l'activité proposée. Le registre géométrique semble jouer un rôle important dans la visualisation de l'intersection des droites ensembles des solutions du système considéré :

On considère le système
$2x - y + 1 = 0$
$x + y - 1 = 0$
P : taisez vous et suivez moi…regardez ce système de deux équations à deux inconnues,
$2x - y + 1 = 0$ est une équation à deux inconnues, elle possède donc une infinité de couples solutions on a dit que la représentation graphique de ces solutions est une…
E : droite
P : bien, je continue $x+y - 1 = 0$ possède aussi une infinité de couples solutions et la représentation graphique est aussi une droite
P écrit au tableau :
Soient D et D' les représentations graphiques respectives de l'ensemble des solutions de chacune des équations $2x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$ dans un repère (O, OI, OJ)
P : pour tracer une droite combien faut-il de points ?
E : deux points
E5 : trois points
Pendant ce temps P trace le repère au tableau
P : qu'elle est l'équation de la droite D,
E: $2x - y + 1 = 0$
P: ou encore
P: $y = 2x + 1$
E: $x = 0$
P : quoi ? on va faire un petit tableau pour tracer la droite D, on va calculer pour x égal à 1 c'est quoi y ?
E : 3 P écrit

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 2 |
| y | 3 | 5 |

P : vous avez là les points de coordonnées (1,3) et (2,5), voyons pour D'
P : je prends x égal 0

| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 0 |
| y | -2 | 1 |

E1 : pourquoi 0 madame
P : comme ça c'est plus facile de le placer dans le repère
P écrit au tableau et trace par la suite
D= (AB) avec A (1,3) et B (2,5)
D' = (CD) avec C (3,-2) et D (0,1)
E5 : ils sont alignés madame
P : alors voilà je trace la droite (AB)
P : qui sont alignés ?
E5 : A et B madame
P : mais je peux toujours dire que 2 points sont alignés, par 2 points ne passe qu'une seule droite, on ne parle d'alignement qu'à partie de trois points ou plus
P : levez vos têtes maintenant et suivez, nous venons de trouver l'intersection de D et D'un point de coordonnées D (0,1) donc le point D appartient à D', le couple (0,1) est solution de l'équation $2x - y + 1 = 0$ et c'est solution aussi de $x + y - 1 = 0$, il vérifie les deux donc c'est la solution du système, on vient de résoudre graphiquement le système on écrira
$D \cap D' = D\ (0,1)$
Le couple (0,1) est solution du système
$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

L'activité mathématique demandée aux élèves prend en compte l'articulation entre plusieurs registres sémiotiques : registre des écritures algébriques et registre du langage naturel dans des cas de congruence sémantique, registre des équations de droite et registre des représentations graphiques. En particulier, on trouve comme exercice dans un devoir à la maison, un exercice simple mais qui n'apparaissait pas dans les autres cahiers : " rechercher une équation réduite de droite, connaissant un tracé dans un repère donné ". Ici, le mode de traitement proposé correspond à une démarche d'interprétation globale qui consiste à mettre en relation les variables visuelles du tracé avec les coefficients de l'équation réduite ainsi que l'appartenance d'un point à une droite avec la vérification de l'équation par ses coordonnées. Ce type de travail permet d'engager les élèves dans des interprétations au niveau procédural et au niveau structural.

## II.6 Un point de vue « fonctionnel » renforcé au sein du thème « système d'équations »

A la suite de l'activité, l'enseignante institutionnalise la technique graphique, en présentant au tableau les différents ensembles de solutions possibles pour un système d'équation et propose aux élèves le problème concret suivant à résoudre:

*Exercice*
*L'aire d'un rectangle de périmètre 36m ne change pas si on diminue sa longueur de 4m et on augmente sa largeur de 3m.*

1) *Trouvez les dimensions du rectangle graphiquement*
2) *Calculer l'aire du rectangle.*

L'intérêt accordé à la dimension sémiotique de l'activité algébrique est donné également à voir au travers de certaines tâches proposées par l'enseignante en fin de séance et qui semblent vouloir mettre en avant une articulation explicite des thèmes d'études fonctions affines et systèmes d'équations. Les types de tâches présentés semblent favoriser une dialectique algébrique/ graphique/ fonctionnel et évaluer les connaissances des élèves autour de ces thèmes. Cependant, nous n'avons pas eu l'occasion d'observer la séance concernée, c'est pourquoi nous nous contentons de présenter les énoncés des exercices qui ne font pas partie du manuel de l'époque mais que l'enseignante a choisi pour nourrir un moment d'évaluation :

*On considère les fonctions*

$f : IR \to IR$ $\quad$ $g : IR \to IR$ $\quad$ $h : IR \to IR$

$x \to 2x+1$ $\quad$ $x \to -x+4$ $\quad$ $x \to -x+1$

*Soient D et D' et D'' les représentations graphiques respectives de f, g et h dans un repère orthonormé (O, OI, OJ)*

4) *Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D et D'.*
5) *montrer que D et D'' sont parallèles.*
6) *Déduire que D' et D'' sont sécantes.*

*5) Exercice*
*a) Déterminer la fonction affine f telle que f(4) = -2 et f(0) = 6*
*b) tracer la représentation graphique de la fonction affine f*

*c) Soit g la fonction affine telle qu g(x) =* $\frac{1}{2}x + 1$

** Tracer la droite D représentation graphique de g*
** Montrer que le point C (-4,-1) appartient à la droite D et placer le point C.*
*d) Résoudre par le calcul le système*

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

*Expliquer comment on peut retrouver graphiquement le résultat.*

## II.7 Un topos de l'élève en expansion

***Déplacement topogénétique vers la classe et non vers un élève particulier***

On a pu constater au cours des séances observées que P2 laisse des responsabilités aux élèves dans la réalisation des tâches, mais son action didactique laisse entrevoir des positions dissymétriques entre elle et ses élèves. Il s'agit en effet, (en opposition avec P1) d'un mouvement topogénétique *descendant,* où la distance topogénétique entre le professeur et l'élève est réduite. Tantôt le professeur négocie les réponses des élèves, tantôt il évalue leur travail. Leur action paraît de ce fait fortement conjointe.

On peut voir par exemple dans ces épisodes, comment P2 fait mine de se mettre, comme l'élève, en position de chercheur : en affichant une certaine forme d'ignorance, il légitime l'ignorance de l'élève et peut l'amener à investir cette position de « chercheur ».

P : **passe au tableau et écris ce que tu exprimes**
E6 passe et écrit , le couple (15, 35) vérifie l'équation x+y = 50
P : bien d'autres couples..
E9 : 40,10
P : **passe au tableau**
E9 passe et écrit :le couple (40, 10) vérifie l'équation x+y = 50
P : voyons ,bien , y en a t-il d'autres ?
E : (5,45), (25,25), (48,2)
P : d'accord moi je vous donne un couple, je prends le couple, laissez moi c'est mon tour de choisir, je prends le couple (22,34)
E4 : 56 madame
P : quoi 56
E3 : n'égal pas 50
P : alors on dira que le couple (22,34) ne vérifie pas l'équation, les couples cités, il y en a d'autres sont solutions de l'équation x+y = 50.

Le professeur laisse ainsi de « l'espace » aux élèves pour parvenir de façon autonome à la réponse attendue en jouant leur jeu :

je vous ai demandé comment vous faites pour choisir vos couples ? **Est ce que vous tâtonnez** ? ou vous choisissez x et y
E2 : non, on choisit x puis on cherche y
P : **moi j'affirme que le couple (-1,4) est solution, qu'est ce que, vous dites** ?
E : ahhhh
E1: on remplace
E0 : 3fois -1 -4 égal -3-4 égal-7 différent de 5
P : d'accord donc (-1,4) n'est pas solution, je vais continuer avec la même application.

## II.8 Une technique didactique « souple » et « ouverte »

Les modes de gestion des contenus d'enseignement, de l'ensemble des interactions et des effets induits sont des dimensions importantes de la pratique de P2 qui présentent des caractéristiques relativement stables au cours des séances observées et qui se rapprochent de ce qu'on a pu observer dans la mise en place des praxéologies autour de la mise en équation.

Par opposition à P1, l'enseignante conserve le même fonctionnement didactique. La principale caractéristique relevée dans notre analyse des séances peut être décrite en termes de problématisation du passage d'un registre de représentation à un autre. Cette prise en compte de la dimension sémiotique de l'activité algébrique est accompagnée d'une dynamique interactive dans la classe sur le plan des négociations des savoirs en jeu. Ainsi même, si ce mode de gestion est favorisé par l'approche des activités introductives corrigées dans le manuel officiel de l'époque contemporaine (des organisations mathématiques qui sont explicites), P2 par ces gestes d'accompagnement et d'analyse, qui semblent invariants parvient de manière conscientisée à contrôler les situations évoquées par ces activités. P2 met ainsi en œuvre une technique didactique que l'on peut qualifier de « souple » et « ouverte », qui lui permet de réguler les échanges entre les élèves sans imposer des éléments au milieu et tout en faisant avancer le temps didactique. Certains gestes de P2 peuvent se décliner en :

***Des gestes de dévolution***

Les tâches assignées aux élèves leur sont systématiquement dévolues, l'enseignante accorde le plus souvent un temps de réflexion, sinon elle convoque des réponses par un découpage des types de tâches proposés ou en reformulant les consignes ou certaines réponses immédiates.

Ces gestes qui sont particulièrement en rapport avec la composante médiative des pratiques consistent principalement à solliciter des explications et à développer des confrontations entre élèves, sans pour autant rajouter d'autres éléments de savoir dans le milieu que ceux énoncés par les élèves, comme en témoignent les deux extraits de transcriptions suivants déjà cités :

P : alors à chaque valeur comment tu fais pour trouver AB et BC ? **par exemple je prendrai Mohamed, comment tu as trouvé** les valeurs 30 et 20, **qu'est ce que tu as fait pour les trouver** ?
E2 : la longueur du rectangle fois2 et BC 20x2
E5 : on peut prendre madame deux nombres qui sont égaux à 50

P : leur somme égale à 50 mais vos choix comment vous le faites ? **vous tâtonnez comme ça (en balançant les bras) ?**
E : non...
P : est ce que vous prenez AB égal 30 puis je te pose la question à quoi doit être égal BC dans ce cas là , comment vous faites pour trouver AB et BC ?
E9 : les deux égal à 50
E4 : le périmètre égal (AB+BC) $\times 2 = 100$ donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50
**P : oui et alors comment tu donnes tes possibilités ? Comment tu les choisis ?est ce que tu les prends en même temps ou l'un après l'autre ?**
E2 : l'un après l'autre
P : bien tu choisis l'un après l'autre
E2 : AB =30, 30x2 = 60, le périmétre100-60 =40 donc BC = 40/2 égal 20
**P : Auriez vous une idée ? Arrêtez d'écrire**
E0 : on peut mettre x = y +200
Je mets y + 200 + y = 500
**P : suivons l'idée de votre camarade, ça va donner le système suivant**
**P : ce n'est pas mon idée, c'est celle de votre camarade, il a dit** j'ai deux équations à deux inconnues, je remarque que x= y+200, je remplace cela dans la 1$^{ère}$ équation, **je peux ou non** ?

## ***Des gestes explicites de régulation : La prise en compte de l'erreur***

Un autre geste repéré chez cette enseignante, consiste à donner publiquement la parole aux élèves sans redouter des contradictions ou des erreurs qui pourraient être considérées comme des empêchements à l'avancée du temps didactique : si l'on interprète ce geste en termes de régulation, on peut dire que l'enseignante utilise à plusieurs reprises l'apparition d'une erreur anticipée pour rappeler la mémoire d'un savoir antérieur pertinent dans la situation. Cela semble aussi permettre de pointer un type d'erreur à éviter.

E0 : madame
P : passe au tableau
E0 écrit au tableau :
Le couple (3,n) est solution de 3x –y = 5 équivaut à 3*3 –n = 5
P : j'ai rien entendu, parle plus fort
E0 : répète ce qu'il a écrit au tableau :
$3 \times 3 - n = 5$ équivaut à
9- n = 5 équivaut à
n = 5 -9 équivaut à
n = -4
**p : est ce que vous êtes d'accord ?**
E : bouahhhh
p : bon pour être sur de son calcul, nous allons vérifier si ce couple est solution
p écrit au tableau :
Vérifions si (3,-4) est solution de 3x –y =5
**E : faux madame**
**P : alors vérifiez**
P et E : $3 \times 3 - (-4) = 9+4=13$
P l'écrit au tableau
**P : voyons qu'elle est la faute**
E : 9 – n= 5
P : donc –n = 5 -9 serait égal, nous allons faire la correction donc le couple (3,-4) n'est pas solution de 3x-y =5
P écrit au tableau :
**Correction de l'erreur** :
9 – n= 5 Equivaut à –n = 5 – 9 Équivaut à –n = -4 Équivaut à n = 4

***Une flexibilité dans l'accompagnement***

L'enseignante dans son accompagnement incite les élèves à expliciter leurs choix, à exprimer leurs points de vue à discuter la pertinence de leurs propositions et à faire ainsi avancer la discussion collective dans le sens de l'avancée du projet d'enseignement et du temps didactique. Dans cet épisode, on voit comment P2 guide les élèves dans la résolution sans donner des éléments pertinents ; c'est aux élèves de mobiliser les techniques mathématiques nécessaires à la résolution et qui seront ensuite validées par l'enseignante:

E : madame
P : oui
E3 : 2x-3y +1 = -5x+y-4
P : oui, elle dit a=0, b=0 donc a=b, c'est vrai mais **qu'est ce qu'on va obtenir ?**
E : une équation à deux inconnues
P : on est donc pas sorti du problème, utilisez cette méthode, je vous aide, **choisissez la 2$^{\text{ème}}$ équation, on exprime…**
E0 : y à l'aide de x
P : **alors on écrit…**
E0 : y = 5x+4
P : **qu'est ce qu'on va faire maintenant**
E0 : on remplace dans la 1$^{\text{ère}}$
P : bien, on va remplacer et P écrit au tableau :

$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ -5x+y+4=0 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3(5x+4)+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$

**p : et après ?**
E : on développe
**P : d'accord**

$\begin{cases} 2x-15x-12+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$

p : ensuite..
E5 : 2x-15x-13
**P : tu es sûre ?**
E : -11 madame
P : réfléchit dorénavant alors on écrit :

$\begin{cases} -13x-11=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$

E5 : x=13 plus…
**P : attend Nassim pas à pas**

$\begin{cases} -13x=11 \\ y=5x+4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=11/-13 \\ y=5\times(-11/13)+4 \end{cases}$

**p : vous n'avez qu'à calculer**
E2 : on simplifie madame
**P : on réduit au même dénominateur.**

***Des gestes de rappel***

Parmi les gestes invariants décrits dans la pratique de P2, nous avons noté le retour systématique de l'enseignante sur les connaissances des élèves. Il peut s'agir de connaissances nouvellement enseignées. Les élèves assument une part de la production d'une *mémoire didactique*[26] de la classe, qui (ce relatif renvoie à quoi ?) leur est dévolue par le professeur. L'enseignante organise le changement de statut d'une connaissance, et la "convertit", en une connaissance formulée puis structurée, voire institutionnalisée.

P : **Allez on commence, qu'a-t-on fait la dernière séance, qu'est ce qu'on a fait précisément** ?
E1 : le couple (a, b) est solution d'une équation, par exemple 3x+y=7 ça veut dire 3a+b=7
P : reprend
E1 : le couple (a, b) est solution de l'équation 3x+y=7 équivalent 3a+b=7
P : qu'as-tu dis ? tu as remplacé (x,y) par (a,b)
E1 : oui
P : c'est quoi 3x+y=7,
E : une équation
P écrit au tableau
ax+by =c est une équation du premier degré à deux inconnues réels x et y
**Est ce que x et y sont des réels donnés ?**
E : non, des inconnues
P : a, b, c sont des réels non nuls à la fois.
P : allez on se tait, la leçon commence **rappelons ce qu'on a fait**, on a définit les séances précédentes les équations du premier degré à deux inconnues puis les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues, ensuite **on a appris à mettre un problème en équations puis on a vu** la méthode de résolution par substitution.

Il peut être question de connaissances antérieures mobilisables par les élèves, qui sont des éléments pertinents à l'avancée du temps didactique. P2 enrichit ainsi le milieu au fur et à mesure qu'elle analyse et évalue les réponses données à ses interrogations :

P **: vous parlez depuis tout à l'heure de fonction, qu'est ce que c'est** ?
E : c'est une fonction affine
P : **et la représentation graphique ?**
E0 : c'est une droite
E2 : c'est quoi 2y +200= 500 ?
P **: c'est quoi cette équation ?**
E : 1er degré à une inconnue
P : **qu'elle est l'inconnue ?**
E3 : y
E4 : x+y=500 et y+200= x
P : **donc x et y vérifient quoi ?**
E4 : un système
P : **quel système ?**
E4 : du problème
P **: c'est à dire quoi ?**

[26] Brousseau et Centeno (1991), et Centeno (1995) ont montré l'importance cruciale de la notion de mémoire didactique du maître. Il semble que celle-ci est plus riche, et joue un rôle plus important, dans les classes où est confiée à l'élève une responsabilité importante dans la gestion des savoirs. Cette observation en recoupe d'ailleurs d'autres, beaucoup plus générales, qui tendent à laisser penser que la richesse de la mémoire collective est proportionnelle à la complexité et à la subtilité des organisations sociales (Halbwachs, 1969, Douglas, 1987, Connerton, 1991).

# III. Conclusions

Tout comme nous l'avons montré dans l'analyse des cahiers d'élèves, nous constatons que P2 suit de très prés les organisations mathématiques autour de la mise en équation et de la résolution algébrique. La pratique de cette enseignante expérimentée montre une reprise de la majorité des activités du manuel officiel et un déroulement du cours selon les moments de l'étude préconisés par l'ouvrage. L'activité de modélisation apparaît au fil des activités comme un enjeu d'enseignement, P2 aménage en douceur le passage du registre arithmétique au registre algébrique et amène les élèves à se détacher progressivement du contexte numérique pour envisager des techniques algébriques. Ce travail de mise en équation qui est mis en avant dans l'ancien programme est toujours explicité par P2, dans une action collective, qui fait quasiment intervenir l'ensemble de la classe, même dans des situations élémentaires.

Un autre point important concerne la gestion des organisations mathématiques autour de la résolution algébrique induites par les choix et les interventions de l'enseignante. En effet P2 fait apparaître les objets d'enseignement « équations à, deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues » comme une explicitation des stratégies arithmétiques, elle accorde ainsi une signification à ces objets comme « outil » de résolution de problèmes, en prenant toujours appui sur le registre numérique, et en introduisant progressivement des ostensifs symboliques (couples de nombres solutions, formulation de l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues, ...) au sein des organisations mathématiques développées .

Par ailleurs, l'apprêtage didactique de la grande majorité des activités trouvant leur source dans le manuel de la réforme contemporaine montre une imbrication de différentes connaissances autour de la résolution d'équation et des systèmes d'équation dans le domaine de l'algèbre sans perdre de vue la dimension sémiotique du travail algébrique (articulation des tâches et décontextualisation des connaissances). Les dialectiques entre registres arithmétique et algébrique font l'objet d'explicitation et d'un questionnement travaillé en classe visiblement plus accentuée que celles observées dans les pratiques de P1 l'année 1 et 2.

Nous avons également mis en évidence à travers cette étude, une fidélité apparente des organisations mathématiques et didactiques développées par P2 autour de la mise en équation et de la résolution algébrique à l'ancien programme (celui de la réforme contemporaine). Toutefois l'étude des pratiques effectives de ce professeur montre à voir une part de conformité des praxéologies mises en place, qui seraient conformes aux organisations mathématiques et didactiques de référence. Pour l'enseignante P1, cette conformité se traduit plutôt par une « conformité de surface », de son côté P2 qui semble avoir des routines bien installées collant aux organisations anciennes, cherche au maximum à transmettre un projet didactique en apportant des régulations à la relation didactique conformément aux injonctions institutionnelles induites par la réforme moderne. Cette conformité de P2 nous parait plus une « conformité en profondeur », tant sur le plan mathématique que didactique. Alors que P1 ne laisse quasiment pas de place à l'élève dans l'activité de mise en équation et une place très restreinte dans l'activité de résolution qui se limite le plus souvent à une mise en œuvre de techniques algébriques anciennes ou à l'accomplissement de tâches isolées selon une gestion souvent centrée sur l'élève au tableau, P2 lègue plus de responsabilité aux élèves, notamment dans la modélisation des situations évoquées par les activités avant de passer à la résolution. Son mode de fonctionnement didactique met plus l'accent sur la construction autonome des apprentissages.

Cette conformité apparaît également dans la gestion du travail graphique. Même si P2 suit l'organisation mathématique développée par le manuel contemporain, elle met en avant des techniques « fortes » qui s'appuient explicitement sur les fonctions affines. On voit apparaître dans ce sens, un processus d'apprentissage qui valorise la dialectique ancien/nouveau des connaissances. L'enseignante n'hésite pas à insérer de nouvelles tâches dans l'organisation mathématique initiale pour imbriquer plusieurs aspects du travail algébriques. Nous pouvons interpréter son action en terme de régulation des apprentissages, qui vient répondre à des ajustements à ce qui est institutionnellement attendu mais non prononcé. Par exemple, l'articulation équation/fonction amorcée au cours de la réforme contemporaine n'est pas vraiment explicitée dans la réforme « moderne » au vue des organisations développées dans le manuel et pourtant P2 rend plus visible cette articulation au sein du domaine dans ses choix d'activités et dans l'explicitation du discours technologique autour de la résolution graphique. Il est intéressant de constater à travers cette analyse, que le « savoir enseigné » par P2 est conforme « en apparence » aux organisations mathématiques « contemporaines » mais que sa gestion mathématique et didactique de ce savoir se rapproche davantage des fondements de la nouvelle réforme dans un souci permanent de dialectique explicite et contrôlée entre les différents registres.

# Chapitre D2. Analyse des pratiques de l'enseignante P3

## Introduction

Entre les moyens d'enseignement et la pratique de classe se situe donc le professeur qui agit à la manière d'un « filtre » teinté. Il « colore » son enseignement en déterminant lui-même le type de savoir, qui sera exposé en classe et la façon dont il le sera, et ce dans tout cadre institutionnel donné. *Alors que les professeurs utilisent le même manuel scolaire, ils s'investissent personnellement dans la conception des projets d'enseignement, exerçant ainsi leur liberté pédagogique* (Roditi, 2005, p.123). Au sein d'une contrainte relative donnée par le programme d'études et le moyen officiel, les enseignants peuvent effectuer des choix différents de stratégie d'enseignement et de travail pour les élèves, comme nous l'avons d'ailleurs soulevé dans l'analyse des pratiques de P1 et P2 qui montrent à voir *des adaptations différentes aux organisations mathématiques de référence.* Ce processus d'adaptation est influencé par certaines caractéristiques personnelles de chaque enseignante (âge, sexe, variables socio-économiques, formation expérience,...). Toutefois, ce ne sont pas directement ces aspects qui nous intéressent, mais la façon dont les enseignants qui ont des caractéristiques diverses s'approprient le savoir à enseigner et colorent leur enseignement.

Dans le chapitre C3, en rapport avec l'analyse des pratiques de classe de P1, nous avons mis en évidence une stratégie de « filtrage » des connaissances qui se manifeste par une problématisation de certains types de tâches et une évacuation de la complexité d'autres organisations mathématiques, comme la mise en équation ou le travail graphique autour de la résolution. Nous nous sommes alors posé la question de savoir si cette stratégie ne serait pas en lien avec la perception des bouleversements profonds induits par le changement de réforme. En d'autres termes, l'enseignante P1 aurait-elle perçu le projet didactique ou épistémologique global dont le manuel se fait écho : projet qui comporte toujours une part d'implicite ?

Pour apporter un éclairage à ce questionnement, nous nous sommes intéressés à une enseignante débutante dans son apprêtage didactique des praxéologies de référence. Nous essayons ainsi de trouver des explications à l'évolution de la pratique de P1 et de mieux comprendre la stabilité de certaines organisations mathématiques et didactiques développées.

Dans ce chapitre, nous nous centrons donc sur l'étude des pratiques d'une débutante ayant réussi au concours du CAPES, que nous nommons P3. La jeune stagiaire nous a accueillies dans sa classe en tant qu'observatrice de la quasi-totalité des séances portant sur les thèmes d'étude : équations et systèmes d'équations à deux inconnues nous a fourni ses notes de préparation de séances autour de ces deux thèmes d'étude.

Dans le cadre de l'analyse des pratiques de P3, nous disposons d'une donnée supplémentaire : les fiches de préparation de l'enseignante. Nous faisons l'hypothèse que cette nouvelle donnée peut contribuer à la détermination des savoirs professionnels de l'enseignante, celle-ci aura sans doute à adapter ses connaissances mathématiques antérieures et à les transformer au service de l'apprentissage des élèves. Par ailleurs, cette donnée permet de repérer des choses nouvelles, notamment une part des attentes par rapport aux situations qu'elle met en place dans la classe, ou ses prévisions de scénario, de difficultés, d'erreurs d'élèves.

# I. La fiche de préparation de P3

La préparation de P3 est assez complète, elle couvre tout le chapitre consacré à ces deux thèmes d'étude, globalement, selon les organisations mathématiques et didactiques données à voir dans le manuel scolaire officiel. Celui-ci apparaît comme le document principal[27] pour l'enseignante (Margolinas, 2007), mais on retrouve également des exercices d'application importés par l'enseignante à la suite des activités. Dans cette fiche, on ne voit pas figurer de répartition séance par séance ou de plan succinct susceptible de rappeler les phases de chaque séance : l'organisation du cours est pratiquement calquée sur celle du manuel avec cependant des moments de travail de la technique rajoutés par P3.

Nous présentons dans ce qui suit, un résumé des principales caractéristiques de cette préparation :

- Nous constatons la reprise de la majorité des activités préparatoires ou introductives aux objets d'enseignements : les trois activités introductives aux équations à deux

[27] Dans une problématique de l'élaboration d'un cours par le professeur et la place des documents dans la mise en texte du savoir à enseigner Margolinas et Wozniak, (école d'été, 2007) définissent *le document principal* comme le document auquel le professeur se réfère abondamment et *le document générateur* comme étant le document à partir duquel l'activité du professeur s'est organisée.

inconnues et quatre activités sur sept en rapport avec les systèmes de deux équations à deux inconnues. Ces activités sont accompagnées de solutions détaillées (avec des couleurs, encadrées) qui font écho aux savoirs algébriques enseignés, sans davantage de commentaires comme si c'étaient les élèves eux-mêmes qui avaient produit ce genre de solutions.

- Nous pointons également un point de différence avec le manuel qui nous apparaît assez significatif : la présence d'exercices préparatoires et d'exercices d'applications en rapport avec le travail graphique, pour chaque thème d'étude. Par exemple avant d'aborder l'activité 3 du manuel (en rapport avec la représentation graphique des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues) on retrouve les exercices suivants, qui semblent organiser le travail autour de la résolution graphique:

<u>Exercice I</u>
Ecrire y en fonction de x
$x + y = 2$ ; $y - x = 2$ ; $2x - y = 3$ ; $3x - 2y = 12$
<u>Exercice II</u>
Soient $\Delta_1$ l'ensemble des solutions de l'équation $x + y = -2$ et $\Delta_2$ l'ensemble des solutions de l'équation $x - y = 5$ ; tracez $\Delta_1$ et $\Delta_2$ dans le même repère. $\Delta_1$ et $\Delta_2$ se coupent en M, calculer les coordonnées de M.

A la suite de l'activité 3 du manuel, nous relevons deux exercices d'application autour de la résolution graphique d'une équation à deux inconnues, l'un est une application directe, l'autre est un problème classique du cadre des grandeurs :

<u>Exercice I</u>
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation : $2x + 3y = 12$.
<u>Exercice VI</u>
ABCD un rectangle, si on ajoute 12cm à la longueur et 7cm à la largeur alors son périmètre sera le double de celui de ABCD.
a) Trouver une relation entre les dimensions du rectangle.
b) Représenter graphiquement les solutions de ce problème.

- Nous constatons aussi à première vue, un intérêt particulier pour la mise en équation des situations évoquées par les activités du manuel ou celles des situations choisies dans la rubrique « mobiliser ses compétences » indépendamment du niveau de difficulté en jeu. En effet, les techniques développées sont toujours explicitées, découpées en sous-tâches clairement identifiées et numérotées :1) choix des inconnues, désignation par des lettres, 2) traduction des informations en écriture algébrique. L'enseignante souligne même les mots clés de l'énoncé par des couleurs différentes selon qu'il s'agit des inconnues ou des liens dans le texte rendant la technique peut-être plus accessible aux élèves:

Activité 1 P 228
1/ x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face.
La relation entre x et y pour que la somme soit égale à 6 est :
$x + y = 6$ x et y sont des entiers naturels tels que $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$
2/ La relation entre x et y pour que la somme soit égale à 10 est :
$x + y = 10$ x et y sont des entiers naturels tels que $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$ (...)
Activité 2 P 228
On désigne par :
x : nombre de cassettes dont le prix d'une cassette est 2,500D .
y : nombre de CD dont le prix d'un CD est 15 D .
1/ le prix des cassettes et des CD est 100D donc on a :
$2{,}5\,x + 15y = 100$ (...)
3 / On suppose que le nombre de cassettes achetés est le double de celui des CD
x 2 y
Donc on a $x = 2y$ (...)
4/ On suppose que le nombre de CD achetés est une fois demi de celui des cassettes
y 1,5 x
Donc on a $y = 1{,}5x$ (...)
Activité 3 p 228
Chercher deux nombres m et n tels que le tiers de leur différence est égal à leur somme
1/3 m- n m+ n
1/ La mise en équation : $1/3\,(m- n) = m+ n$
Situation p 233
Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme
2 3
augmenté de 2 .
1/ On désigne par x et y ces deux nombres
2/ Mise en équation : $2\,(x + y) - 3 = 3\,(x + y) + 2$

- Une autre différence avec le manuel, relevée au niveau de l'organisation mathématique qui semble apprêtée par P3 au fil de sa fiche de préparation, est que la technique graphique apparaît comme la première technique de résolution des systèmes ; elle précède les techniques algébriques. Nous constatons aussi la présence de plusieurs exercices non corrigés consacrés à la résolution graphique des équations à deux inconnues et des systèmes d'équations, qui semblent témoigner de l'importance que l'enseignante accorde à cet aspect du travail algébrique.
- Les activités du manuel consacrées à la résolution graphique sont accompagnées de solutions détaillées avec des schémas clairs et soignés, prenant visiblement plus de place dans la préparation de P3 que le travail numérique – algébrique lié à la résolution de systèmes ou d'équations.
- Les moments d'institutionnalisation suggérés par le manuel officiel sont repris tels quels à la suite des activités proposées, à l'exception d'une *conclusion* qui figure dans la préparation de P3 à la suite de la résolution graphique. Elle semble constituer un moment de synthèse (décontextualisation des connaissances autour du graphique) abordant les cas particuliers d'ensemble de solutions:

**Conclusion**

La résolution d'un tel système revient à étudier l'intersection de deux droites :

1) Si les deux droites sont strictement parallèles, aucune solution.
2) Si les deux droites sont sécantes, une seule solution
3) Si les deux droites sont confondues, c'est toute la droite.

Les caractéristiques des organisations mathématiques et didactiques apprêtées par P3 relevées dans sa fiche de préparation, permettent d'avoir a priori une vue d'ensemble sur la planification de cette enseignante débutante et sur ses préoccupations concernant certains éléments de savoirs légitimés par l'institution. Nous retenons des traces écrites une fidélité apparente au manuel officiel, notamment en ce qui concerne les activités introductives et les moments d'institutionnalisation préconisés. Les techniques algébriques ne semblent pas plus visibles, par contre, les techniques graphiques paraissent plus renforcées et davantage explicitées. L'accent semble mis sur le travail graphique autour de la résolution des équations et des systèmes d'équations à deux inconnues. Nous décrivons dans ce qui suit, les pratiques de classe de la jeune stagiaire en rapport avec les praxéologies développées pour la mise en équation(s) et la résolution.

# II. Analyse des praxéologies développées autour de la mise en équation et de la résolution

## II.1 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la mise en équation

***Une conformité apparente aux organisations mathématiques et didactiques de référence***

La stagiaire suit assez fidèlement les organisations mathématiques et didactiques développées autour de la mise en équation des situations évoquées par les activités du manuel officiel. Elle choisit de mettre en œuvre les trois activités introductives aux équations du premier degré à deux inconnues et quatre activités parmi les sept, se rapportant au thème d'étude « Système de deux équations à deux inconnues » .Elle reprend ainsi les consignes des activités relatives, sans rajouter d'autres éléments à l'organisation mathématique autour de la mise en équation :

P : Vous écrivez d'abord I) équation du premier degré à deux inconnues et vous prenez l'activité 1 p 233, allez faites vite, je vous laisse le temps de la faire.
E : je lis madame ?
P : d'abord il faut comprendre le problème, ensuite on corrigera.
E1 : c'est quoi équilibré madame

P : ça veut dire des dés identiques, qui ne sont pas truqués, les dés que vous connaissez, on demande de trouver la relation entre x et y.

***Des techniques mathématiques visibles et explicites***

L'enseignante P3 fait le choix d'expliciter pour chaque activité, la technique de mise en équation en faisant apparaître les sous-types de tâches qui la constituent : choix des inconnues et traduction algébrique. Dans le contexte de la résolution du problème posé, elle procède à une identification des éléments pertinents de la situation pour amener progressivement les élèves à l'équation ou au système d'équations qui la modélise. Malgré le caractère élémentaire de certaines situations ou contextes (mis en avant dans l'analyse a priori), P 3 convoque une explicitation et une reformulation des sous- tâches en jeu, comme pour s'assurer que les élèves maîtrisent chaque étape de la technique. Ainsi dans l'activité 1 par exemple où une partie de la technique est prise en charge par l'énoncé, P3 rend visible les sous tâches requises pour écrire la relation entre x et y :

P : bon allez on commence, est ce que vous avez compris de quoi il s'agit ?
E : oui madame, madame...
P : On cherche à écrire la relation entre x et y sachant que leur somme est 6, que représente x et y ?
E2 : les inconnues
P : oui mais pour le problème ?
E3 : ce qu'on obtient sur chaque face du dé
P : et qu'est ce que ça doit vérifier ?
E : la somme égale 6
P : si on traduit mathématiquement, ça veut dire
E2 : x plus y égal 6
P : très bien qui passe au tableau ?
E2 : madame
P : oui Salwa
Salwa écrit seule au tableau, alors que l'enseignante lit la suite de l'activité
La relation entre x et y est $x + y = 6$.

Au fil des activités, on voit apparaître le souci de l'enseignante d'apporter des éclairages supplémentaires aux situations proposées. Dans l'activité 2 par exemple où le contrat didactique relatif à la mise en équation revêt plus d'importance (cf. analyse a priori), on peut constater que la réalisation de la tâche par les élèves apparaît comme une étape importante dans l'apprentissage. Savoir expliciter et argumenter les techniques pour chaque sous tâche est rendu nécessaire par l'enseignante. On peut voir durant cet épisode, comment l'enseignante oriente les élèves vers des résolutions de type algébriques dès le départ, en identifiant ce qui est inconnu dans le problème, etc. Elle reformule ensuite la consigne pour amener les élèves à convertir les informations stipulées dans l'énoncé, en une équation du premier degré à deux inconnues.

P : bon on doit commencer après je vous laisserai le temps de finir, est ce que le problème est clair ?

E : la 3ème question madame..
P : on verra ça après d'abord on va comprendre la situation, qu'est ce qu'on ne connait pas dans le problème
E : le nombre de cassettes et le nombre de CD
P : oui ce sont donc..
E : les inconnues
P : très bien, qu'est ce qu'on fait ?
E : soient x et y ...
P : très bien, maintenant il faut modéliser le problème par une équation du premier degré à deux inconnues
E3 : $2{,}5x + 15y = 100$
P : oui pourquoi ?
E2 : 100 dinars c'est la somme pour acheter les CD et ...le prix d'une cassette..
P : bien donc c'est clair pour tout le monde
E : oui madame je passe
P fait passer une élève au tableau qui écrit seule :
Choix des inconnues : soient x le nombre de cassettes et y le nombre de CD
Mise en équation : le prix d'une cassette est 2,5 D et le prix d'un CD est 15 D
Donc : $2{,}5x + 15y = 100$ .

Même lorsque les tâches proposées renvoient explicitement à un travail de nature algébrique mais suggèrent implicitement un travail de modélisation, (comme c'est le cas pour l'activité 2 où il s'agit de passer par une mise en équation avant d'entamer la substitution algébrique ), l'enseignante accorde autant d'importance à ce travail qui peut paraître caché au niveau de l'organisation mathématique Elle explicite la relation entre les variables x et y avant de passer à la résolution des équations.

P : On va comprendre la situation par étapes, le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD (elle écrit au tableau et souligne le mot double) ça veut dire quoi double mathématiquement..
E : x égal 2y
P : très bien, alors qu'est ce qu'on fait ?
E : bouhaaa
E3 : on ne connaît pas ni x ni y
P : oui mais on sait que x s'écrit en fonction de y donc..
E : bouhaaa.....
P : On remplace dans l'équation et on cherche y .

## *L'absence d'une dialectique apparente entre arithmétique et algébrique*

La visibilité de la technique de mise en équations s'étend ainsi aux organisations mathématiques liées aux systèmes de deux équations à deux inconnues. L'enseignante continue à mettre en avant les tâches de conversion nécessaires à cette modélisation en faisant apparaître à plusieurs reprises les caractéristiques dominantes de ce type de tâche. Toutefois nous pouvons constater l'absence d'une dialectique entre arithmétique et algèbre[28] dans la résolution des problèmes proposés. P3 reste sur ce point tout à fait

[28] Cette réflexion à propos de l'habileté de futurs enseignants à conduire les actions didactiques pertinentes à la jonction arithmétique / algèbre nous amène à repenser certains aspects de la formation des maîtres. Les programmes d'études de mathématiques actuels sont construits sur une dichotomie entre l'arithmétique et l'algèbre : l'arithmétique constitue le domaine mathématique des études primaire,

conforme aux organisations mathématiques de référence : elle instaure d'emblée un contrat algébrique sans laisser l'occasion aux élèves de proposer d'éventuelles solutions à raisonnement arithmétique. La stagiaire ne problématise pas ou du moins ne questionne pas la modélisation algébrique qu'elle impose. Ce qui importe semble surtout l'enseignement des techniques de mise en équation à mobiliser. Dans l'activité 3 introductive aux systèmes d'équations, on peut constater comment l'enseignante gère la situation, en faisant apparaître le symbolisme, comme à la fois un outil d'identification des valeurs inconnues en relation les unes avec les autres et un outil de modélisation globale des relations liant les données du problème. Les équations obtenues servent à introduire l'objet d'enseignement « système de deux équations à deux inconnues » :

P : bon on commence, on a R boules rouges et N boules noires, Que représentent R et N ?
E : les inconnues
P : bien, c'est quoi le triple de N ?
E1 : 3N madame
P : comment donc on traduit la phrase le triple de N est égal à R diminué de 3 ?
E2 : madame 3N = R – 3
P : c'est correct ?
E : oui madame
P : on continue, c'est quoi quadruple ?
E3 : 4N
P : donc qui traduit la deuxième phrase ?
E : madame, madame
P : Amel c'est quoi l'équation ?
A : 4N = R + 3
P : on écrit ça (P écrit au tableau)
Soient R le nombre de boules rouges et N le nombre de boules noires
Mise en équations :
3N = R – 3
4N = R + 3
P : R et N vérifient en même temps ces deux équations, on dit que c'est un système de deux équations à deux inconnues.

## ***Un topos de l'élève très « balisé », voire restreint***

Bien que l'organisation mathématique développée par P3 montre des techniques de mise en équation nettement plus visibles que celles observées chez P1, le topos de l'élève concernant ce type de tâches nous parait très « balisé », voire restreint. En effet, les élèves ont très peu de liberté pour s'exprimer sur la situation proposée puisque d'emblée P3 convoque des stratégies de type algébrique.

P : tu ajoutes au début que x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face et tu écris la relation entre …
L'élève rajoute et écrit :

---

l'algèbre est réservée à l'ordre secondaire et à aucun moment du cursus scolaire les techniques arithmétiques de résolution de problème ne sont explicitées. Cette division du cursus scolaire, même si elle ne date pas d'aujourd'hui (n'est pas propre à la réforme moderne), si elle est respectée en tant que telle à l'intérieur de la formation ne tient pas compte du problème incontournable que jouent les connaissances déjà acquises dans le processus de construction de connaissances nouvelles.

x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face,
La relation entre x et y pour que la somme soit égale à 6 est : $x + y = 6$

Dans d'autres situations qui permettent a priori d'envisager une dialectique arithmétique- algèbre l'enseignante anticipe sur la technique de mise en équation en commençant par une désignation des inconnues. C'est le cas de l'activité suivante dont le contexte géométrique posé aurait pu conduire les élèves à envisager des résolutions qui s'appuient sur le cadre des grandeurs. Pourtant l'enseignante n'offre pas l'occasion aux élèves de mobiliser éventuellement des stratégies de nature arithmétique. Ce constat confirme encore une fois, l'absence de tentative apparente de problématisation d'une dialectique arithmétique- algèbre. Ce qui contraste avec ce qu'on a pu observer chez P2 pour le même genre d'activité.

Certains éléments du milieu, relatifs à l'interprétation des relations numériques évoquées dans l'énoncé (tel que le fait de rajouter précisément 7 à y et 12 à x ou le périmètre du rectangle) pour pouvoir écrire les expressions algébriques correspondantes, glissent toutefois dans le *topos* de l'élève.

P : chacun travaille tout seul vous avez 10 minutes et je vais voir si vous avez compris la phrase.
P circule entre les rangs et regarde le travail des élèves.
P : qui a commencé ? Prenez le temps de réfléchir
5 minutes s'écoulent et P intervient
Bon allez , il faut d'abord désigner la longueur et la largeur de ABCD soit x et y ,
E : on ajoute 12 et 7
P : oui si je vais ajouter 7 à y et 12 à x qu'est ce qui se passe ? il faut comprendre le phénomène
E : hahaha...
P : je veux dire on trouve quoi ?
E : un autre rectangle
P : oui alors son périmètre, le périmètre de qui ?
E1 du premier
E2 : du 2ème rectangle madame
P : attention lisez bien, le double de celui de ABCD donc c'est le 2ème rectangle, c'est très important si vous ne comprenez pas le sens de la phrase, vous ne pouvez pas continuer. Alors qu'est ce que je vais faire ? s'il vous plait suivez l'écriture mathématique , je veux l'entendre
(Les élèves proposent des formules, certaines sont erronées)
P : allez qu'est ce que j'écris ?
E2 : deux x plus 12 plus y plus 7 égal deux fois deux x plus y.
P l'écrit au tableau en insistant sur la signification de 2 qui traduit le double et rappelle que la formule du périmètre du rectangle c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
P : est ce que c'est clair ou non ? S'il vous plait silence.

Mais dans l'ensemble, lorsque la technique de mise en équation n'est pas en partie dévoilée par l'énoncé, elle reste souvent sous la responsabilité de l'enseignante. Comme si au bout du compte, le rôle assigné à l'élève est essentiellement d'être parfaitement capable de reformuler la technique selon un découpage bien déterminé 1) choix des inconnues, 2) mise en équation, 3) résolution (cf. extrait cité ci-dessus)

## *Une technique didactique « ostensive »*

Le fonctionnement didactique de P3 au fil des séances, montre un intérêt certain accordé à la mise en équation en tant qu'activité de résolution de problème. Cette représentation se reflète d'abord dans la dévolution des situations proposées, puis dans le discours de l'enseignante. Nous constatons à plusieurs reprises son souci d'apporter un éclairage aux situations évoquées, en cherchant à faire participer les élèves dans la compréhension du sens des informations, qui leur permettent de modéliser les situations proposées en une équation à deux inconnues ou en système de deux équations à deux inconnues: *« alors s'il vous plait l'importance c'est le sens de la phrase, si elle n'est pas comprise vous ne pouvez pas trouver l'équation ni tracer, il faut bien lire chaque mot de la phrase ».*

Cette volonté délibérée de P3 à faire de la mise en équation un véritable enjeu d'enseignement ressurgit dans toutes les activités, même celles qui peuvent apparaître à caractère élémentaire. Cependant son fonctionnement didactique montre une anticipation des difficultés liées à la conversion entre registres .Les gestes didactiques de P3 peuvent apparaître comme un « savoir faire » qu'elle tient à dicter à ses élèves indépendamment de la nature ou du contexte des situations évoquées. Nous relevons au travers de ces gestes et du discours de l'enseignante une certaine « autorité » à cadrer systématiquement les stratégies des élèves allant jusqu'à divulguer parfois dès le départ les traits pertinents des situations évoquées par les activités. Elle oriente collectivement la classe vers une démarche singulière, comme si elle cherchait à éviter certaines erreurs ou un détournement possible du projet d'enseignement. C'est pourquoi, en dépit d'une richesse apparente d'interactions avec la classe, l'enseignante semble finalement laisser peu de liberté aux élèves pour expliciter leur propre « façon de faire » ou leur manière « d'interpréter » certaines situations évoquées par les activités :

P : Deux nombres sont tels que <u>le double</u> de <u>leur somme</u> <u>diminué de 3</u> est égal <u>au triple</u> de <u>leur somme augmenté de 2.</u>
P : On va comprendre la situation alors mathématiquement comment cela ? on a le choix pour prendre x,y ou m,n..
(P3 souligne les termes au tableau)
E : deux x plus y.
P : attendez le double de leur somme x plus y entre parenthèses, ok, diminué de trois qu'est ce que ça veut dire ?
E : moins trois
P : d'accord maintenant le triple de quoi ?
E : de x plus y
P : oui qu'est ce que ça veut dire augmenter ?
E : on ajoute deux
P : bon on écrit donc (P3 écrit l'équation au tableau) $2 (x + y)- 3 = 3 (x + y) +2$.

Nous considérons dès lors que les pratiques de P3 relatives au savoir à enseigner sur la mise en équation relèvent de l'ostension, parfois déguisée.

## II.2 Praxéologies mathématiques et didactiques liées à la résolution

***L'empan graphique « prépondérant » dans les organisations mathématiques***

Les organisations mathématiques liées à la résolution graphique occupent une place importante dans l'enseignement de P3 pour les deux thèmes d'étude considérés. Ces praxéologies sont bien mises sur le devant de la scène didactique, ce qui paraît conforme aux attentes institutionnelles. Les praxéologies liées à la résolution algébrique quant à elles, semblent moins problématisées par l'enseignante. Tout comme dans *les organisations mathématiques de référence*, certains aspects du travail algébrique paraissent naturalisés ou absents de l'organisation développée.

***L'absence d'une dialectique apparente entre arithmétique et algèbre dans la résolution des équations et des systèmes d'équations***

La jeune enseignante s'appuie sur la première activité du manuel qui vise à introduire l'objet de savoir équations à deux inconnues. Les solutions au problème posé sont d'emblée envisagées par P3 dans le registre algébrique moyennant un tableau de valeurs permettant de distinguer les valeurs attribuées aux inconnues x et y. Cette représentation semble permettre à l'enseignante de dépasser la distinction des couples symétriques qui vérifient la relation $x + y = 6$. Cependant la technique permettant de proposer ces couples solutions est invisible, peut être en raison du caractère élémentaire de l'équation et la notion de couple est également naturalisée :

P : bien, maintenant on cherche à compter tous les couples (x, y), comment on peut faire ?
E : directement des valeurs madame
P : et si on veut organiser l'écriture on peut faire…
E : un tableau
P : oui, Salwa trace un tableau avec x et y
E : on peut mettre x de …jusqu'à 6
Salwa fait le tableau et le remplit avec la collaboration des élèves

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

P : on va écrire ces résultats sous forme de couples va-y Salwa
Salwa écrit
(1,5) ; (2,4) ; (3,3) ; (4,2) ; (5,1)
P : bon on passe à la 2$^{ème}$ question qui passe au tableau ?

A la suite de la première activité, P 3 choisit comme dans le manuel d'institutionnaliser l'objet de savoir « équation à deux inconnues » en reprenant la définition du manuel sans se préoccuper du sens donné à la résolution d'une équation à deux inconnues émergeant dans un contexte numérique.

P : bon maintenant on va écrire la définition, les relations qu'on a trouvé sont des équations à deux inconnues et chercher les solutions c'est-à-dire trouver tous les couples qui vérifient l'équation.
L'enseignante écrit au tableau : Définition : L'équation ax + by +c = 0 avec (a,b) ≠ (0,0), x et y sont deux inconnues est appelée équation du premier degré à deux inconnues.

De même en ce qui concerne, l'activité 4 introductive aux systèmes d'équations à deux inconnues qui permet d'envisager des solutions arithmétiques « par essai-erreurs », l'enseignante propose d'emblée une technique algébrique qui se rapproche de la technique par élimination. Notons que la résolution algébrique d'une équation à deux inconnues n'a fait l'objet d'enseignement qu'à travers les exemples proposés dans les trois activités du manuel et qu'à ce moment de l'étude, la technique algébrique de résolution d'un système n'a pas été présentée.

P : R et N vérifient en même temps ces deux équations, on dit que c'est un système de deux équations à deux inconnues, la 2ème question on veut trouver N et R
E : bouhaaaaa
P : regarder si on fait la différence des égalités qu'est ce qu'on trouve ?
E1 : 4N - 3N
P : oui égal quoi ?
E : bouhaaa
P : attendez on va l'écrire au tableau, (P3 écrit)
4N - 3N = ( R + 3) – (R – 3)
P : c'est clair ? je continue, on trouve
4N - 3N = R + 3 –R + 3
N = 3 +3
N = 6
P : comment on fait pour trouver R ?
E : la somme madame
P : N et R vérifient les deux équations en même temps, il suffit de remplacer N dans l'une des équations allez vous suivez :
3x 6 = R – 3
Sig 18 = R – 3
Sig R = 18 + 3 = 21.

***<u>L'absence d'une technique de résolution algébrique apparente pour une équation à deux inconnues</u>***

Comme nous l'avons signalé plus haut, la technique de résolution d'une équation à deux inconnues n'apparaît pas dans l'organisation mathématique développée par P3. On ne relève aucun discours technologique autour de la recherche des couples solutions d'une telle équation. Comme pour l'activité 1 du manuel, la technique permettant de résoudre l'équation obtenue dans l'activité 3 est cachée et n'est accompagnée d'aucune justification :

Nadia écrit
2m+4n = 0 sig
N : on divise par 2, madame
P : oui on obtient…
N :m+2n = 0
p : bon donnez moi quelques couples
E : (0,0) ,(2, 1),… (1,2)
P : attention comment (1,2) ?
E1 : faux madame
P : bon vous pouvez donner plusieurs couples on prendra cinq dans la question d'après, alors la suite.

Les élèves proposent des couples d'entiers sans expliciter la ou les techniques utilisées pour produire ces réponses dont certaines sont erronées. Ce sont des techniques de production invisibles. P3 insiste sur les techniques de contrôle de la validité de la réponse donnée : la technique de substitution numérique, mais ces techniques servent la vérification et non la recherche de solutions. Le passage à une technique faible ou forte n'est pas rendu visible par l'enseignante.

P : Donnez-moi cinq couples
E : (0,0) ; (2,-4)
P : (interrompt cette intervention) tu es sur ? (Il écrit au tableau) vérifie, regarde,
$2 + 2 \times (-4) = -6 \neq 0$
E1 : c'est (-4,2) madame
P : oui c'est bon …vite trois autres
E : (-2,1), (-6,3), (-4,8), (-10,5)
P : bien j'écris ça au tableau et il faut maintenant placer ces points dans un repère, qui passe ?

En dépit des techniques de vérification mises en avant par P3, certains élèves persistent à intervertir l'ordre des termes du couple en inversant les rôles attribués aux lettres x et y, P3 choisit alors d'abandonner provisoirement l'avancement de son projet d'enseignement et, pour tenter de réguler la situation, elle choisit d'insérer une nouvelle tâche qui n'apparaît pas dans sa fiche de préparation et qui vise à faire fonctionner la notion de couple solution d'une équation à deux inconnues. P3 explicite alors la technique de substitution, permettant de trouver la valeur d'une inconnue connaissant l'autre, par une résolution de l'équation à une inconnue. L'enseignante finit dès lors par rattacher la notion de couple solution aux coordonnées d'un point dans un repère:

P: on va commencer on n'a pas beaucoup de temps, qu'est ce que ça veut dire (m, 2) vérifie l'équation
E1 : y = 2 et x = m
E2 : m plus 6 moins 1 égal 0
P : on me donne le couple (3,2) par exemple, on a l'équation qu'est- ce qu'on fait ?
E : on remplace
P : bien Samia tu écris au tableau
Le couple (m,2) est solution de l'équation (I) sig
m+3x2 -1 = 0

m + 6 -1 = 0
m + 5 = 0
m = -5
E2 : pourquoi on écrit n et pas x et y madame
P : c'est l'exercice, le couple (m, 2) ça veut dire que m est l'abscisse et 2 est l'ordonnée
Si tu as le couple (2,3) tu remplaces dans l'équation x par 2 et y par 3. Dans la 2ème question je vais changer
E1 : pourquoi vous n'avez pas dit l'ensemble des couples (x, 2) ?
P : x peut être plusieurs choses dont m, allez la 2ème question.

## *Des techniques « faibles » de résolution algébrique de systèmes*

Au sein du thème d'étude « Système de deux équations à deux inconnues », l'enseignante choisit les activités 5 et 6 du manuel pour mettre en avant les techniques de résolution algébrique par substitution et par élimination mais elle fait le choix de mettre en œuvre ces techniques à la suite de la technique graphique. Dans ces activités (analyse a priori), les tâches proposées suggèrent un découpage de la technique algébrique en sous tâches : transformations d'écritures par l'expression d'une inconnue en fonction de l'autre, substitution algébrique puis numérique, résolution d'une équation à une inconnue.... de façon à ce que la mise en œuvre de ces techniques soit accessible aux élèves dans une recherche individuelle mais guidée par l'organisation didactique. La responsabilité de la technologie justifiant ces techniques, qui se base essentiellement sur les règles de conservation de l'égalité et l'équivalence logique des systèmes d'équations semble laissée à la charge du professeur. Pourtant dans l'organisation mathématique développée par P3, on ne relève aucun discours technologique autour de la mise en œuvre de ces techniques. Nous constatons sur cet extrait de transcription la prise en charge par P3 de la résolution du système en reprenant le découpage en sous tâches (préconisées dans l'énoncé). La technique mise en place est « faible » : P3 semble évacuer toute problématicité autour de l'équivalence logique des transformations algébriques mises en œuvre. L'organisation mathématique conduite s'appuie explicitement sur la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue considérée comme une connaissance disponible et suffisante pour justifier la technique de résolution d'un système par substitution:

p : Exprimer m en fonction de n dans l'une des équations, par exemple la première puisque c'est la plus simple qu'est ce que vous dites ?
E : m égal 96 moins n
P : oui silence, vous suivez
P écrit au tableau

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ m + 78 = 2(n+78) \end{cases}$$

P: qu'est ce qu'on demande ensuite ?
E: on remplace dans l'autre équation

P: bon vous suivez

$$\begin{cases} m= 96 -n \\ 96 -n +78 = 2n + 156 \end{cases}$$

P: On obtient quoi ?
E: une équation madame
P: oui mais qu'elle équation?
E3: à une inconnue n
P: vous savez la résoudre , je continue donc
Equi valent à

$$\begin{cases} m= 96 -n \\ 2n +n =78 + 96 -156 \end{cases}$$

P: équi valent à , on calcule ça fait 18
Equi valent

$$\begin{cases} m= 96 -n \\ 3n = 18 \end{cases}$$

Equi valent à

$$\begin{cases} m= 96 -n \\ n = 18/3 \end{cases}$$

E: six madame
P: en déduire m et n donc on remplace n dans la première équation on obtient(P écrit)
équi valent à

$$\begin{cases} n=6 \\ m=90... \end{cases}$$

***<u>Des techniques « fortes » autour de la résolution graphique</u>***

Si les techniques algébriques de résolution des équations et des systèmes d'équations sont rendues invisibles ou « faibles » par l'organisation mathématique mise en place par P3 (qui se contente de reprendre les tâches suggérées dans les activités et de faire copier aux élèves les résumés des algorithmes de résolutions tels quels), les techniques graphiques, quant à elles font l'objet d'explicitations qui leur confèrent un caractère plutôt « fort ». En effet, concernant le premier thème d'étude, l'enseignante ne suit plus vraiment les organisations didactiques préconisées, elle choisit d'insérer d'autres types de tâches (que nous avions évoqués plus haut) qui semblent permettre une meilleure gestion des connaissances autour de l'activité 3, rappelons que c'est l'unique activité préparatoire qui vise l'introduction de la représentation graphique de l'ensemble de solutions d'une équation à deux inconnues.

Les activités choisies par P3 (prévues dans sa préparation) s'organisent essentiellement autour du découpage de la technique graphique en sous tâches, faisant apparaître une dialectique algébrique – graphique- fonctionnel cachée au niveau des organisations mathématiques développées dans le manuel. L'absence d'un discours technologique au sein de la praxéologie de référence semble cette fois problématisé par la jeune stagiaire, qui tente de planifier son enseignement selon un plan théorique autour du travail graphique. Dans le premier exercice, elle décide de proposer le type tâche « exprimer y en fonction de x dans une équation à deux inconnue donnée ». Les élèves manipulent dans ce cas des expressions algébriques ou littérales pour transformer dans le registre algébrique des équations qui apparaissent sous la forme canonique ($a x + by + c= 0$) ou qui comportent des inconnues de part et d'autre de l'égalité en des équations qui se mettent sous la forme réduite ($y = a x + b$).

Sur cet épisode les techniques de transformation ou de transposition des termes d'un membre à l'autre de l'inégalité sont réalisées sans difficulté mais ne sont pas justifiées :

P : Ecrire y en fonction de x dans chacun des cas suivants :
$x+y = -2$ ; $y -x = 2$ ; $2x -y = 3$ ; $3x - 2y = 12$ ., $2x-y = x + y - 5$
E : madame, madame,
P: oui vous allez passer un par un alors Naoufel
$x+y = -2$ sig $y = -2 -x$
p: bien Imene
Iméne écrit
$y -x = 2$ sig $y = 2+x$
p : tu termines les autres, vite
$2x -y = 3$ sig $y = 2x - 3$
$3x -2y = 12$ sig $y = 3/2\ x - 6$

***Ancrage du nouveau dans l'ancien***

Dans l'étape suivante, P3 décide de passer au registre graphique et propose des équations de droites affines qui font partie des connaissances mobilisables par les élèves. L'organisation mathématique ainsi mise en place articule à la fois les registres algébrique et graphique. On peut voir dans cet épisode que les élèves procèdent de manière autonome (dynamique ancien/ nouveau) à la transformation des écritures pour faire apparaître l'expression algébrique de fonction affine avant de se lancer dans la représentation graphique des droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$. P3 anticipe par la même occasion sur la résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues en convoquant l'intersection des courbes représentatives :

P : Bien avant de faire l'activité 3, vous faites l'exercice 2, rapidement, vous écrivez : Soit $\Delta_1$ la droite d'équation $x+y = -2$ et $\Delta_2$ la droite d'équation $x -y = 5$
1) Tracez $\Delta_1$ et $\Delta_2$ dans le même repère (o, I, J)
2) $\Delta_1$ et $\Delta_2$ se coupent en M, calculer les coordonnées de M.
E : je passe madame
P : oui Amel au tableau, qu'est ce que cela vous rappelle ?
E : fonction affine madame
P : oui donc comment on représente ?
E2 : $y = -x - 2$
E1 : $y = x - 5$
E : On choisit deux points pour la droite
P : bien alors Amel tu commences
Amel commence par faire un tableau de valeurs puis trace la droite correspondante, les élèves font la même chose sur leurs cahiers

Le professeur fait enfin le choix d'aborder l'activité 3 du manuel en s'appuyant sur les deux activités précédemment étudiées. Les élèves procèdent à une transformation de l'équation /3(m –n) = (m +n) afin de proposer quelques couples solutions, comme réponse à la question posée par l'activité. On peut voir là l'effet du contrat didactique instauré par l'enseignante :

Nadia rectifie l'écriture 1/3 (m – n) = (m +n)
P : bon on vous demande une valeur du couple (m, n), comment on fait ?
E : On prend des valeurs
P : comment on va les choisir ?
E : On peut simplifier l'écriture
P : oui on peut se ramener à la forme a x + by +c = 0
Nadia simplifie l'écriture et la classe suit
1/3( m – n) -( m +n)= 0
1/3m -1/3n –m –n =0
1/3 m-m -1/3 n –n = 0
1/3 m -3/3 m-1/3 n-3/3 n=0
-2/3 m – 4/3 n = 0
p: on peut continuer, on multiplie par trois
Nadia écrit -2m -4n = 0
p : plus simplement
Nadia écrit 2m+4n = 0 sig m+2n = 0

Ces couples sont ensuite représentés sans difficultés par les élèves et c'est à la suite du constat d'alignement queP3 procède à la décontextualisation des connaissances autour de la technique graphique de résolution d'une équation à deux inconnues. L'enseignante met ainsi en place un milieu « antagoniste », possible grâce aux connaissances mobilisables par les élèves et bénéficie d'avance d'un plan théorique, qui lui permet d'avancer aisément sur son projet d'enseignement :

P : oui c'est bon …vite trois autres
E : (-2,1), (-6,3), (-4,8), (-10,5)
P : bien j'écris ça au tableau et il faut maintenant placer ces points dans un repère, qui passe
E : madame
P fait passer un élève au tableau qui trace le repère puis les points.
P : qu'est ce qu'on remarque ?
E : alignés
P : très bien les points sont alignés. Vous écrivez la représentation graphique des points de coordonnées (m, n) est une droite d'équation m+2n = 0, qui passe par l'origine,
P : on généralise : La représentation graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues est une droite.

P3 continue à développer l'organisation mathématique autour du travail graphique, en installant un moment de réinvestissement des connaissances. Elle fait le choix de proposer aux élèves deux applications (cités plus haut, à faire à la maison) ainsi qu'une situation du manuel par laquelle les élèves sont amenés à modéliser la situation évoquée avant de la résoudre graphiquement. On peut revoir dans cet épisode, le découpage de la technique en sous tâches convoquées par l'enseignante et son souci de justifier la technique indépendamment du moment de l'étude :

2 (x + y)- 3 = 3 (x + y) +2
P : maintenant on veut représenter l'ensemble des solutions. Est ce qu'on va chercher x en fonction de y ?
E : non y en fonction de x
P : quelles sont d'abord les étapes ? L'équation du premier degré doit apparaître est ce que je peux représenter comme ça les solutions ? Est ce que c'est clair pour vous ?
E : non
P : alors il faut développer et simplifier l'écriture
P écrit au tableau et les élèves suivent et recopient en même temps sur leurs cahiers
2x +2y -3 = 3x + 3y +2
Sig 2x -3x +2y -3y -3-2 = 0
Sig -x –y -5 = 0
P: je vous ai déjà dit qu'une équation du premier degré à deux inconnues est de la forme ax + by +c = 0. Si on veut maintenant représenter l'ensemble des solutions
E1 : on a dit la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine
P : attention on a vu dans les chapitres précédents les fonctions affines et linéaires, je veux comprendre si je veux exprimer y en fonction de x
E2 : on a besoin de deux points
P : on peut directement prendre deux points.

Ainsi, au fil des activités, les techniques graphiques font l'objet d'explicitation et d'un approfondissement de l'étude. En effet, à l'opposé de ce qu'on a pu constater chez P1, le type de tâche résolution graphique apparaît pour P3 comme l'occasion d'une étude des trois cas possibles d'ensemble de solutions d'un système d'équations. Rappelons que le manuel officiel à ce sujet : au sein des activités proposées (qui constituent la partie identifiable à un cours), on relève surtout des systèmes ayant une solution unique seule la dernière activité (13) présente le cas d'un système qui n'admet pas de solution. Pourtant dans l'organisation développée par P3 les trois cas de systèmes sont effectivement reliés aux positions relatives de deux droites dans le plan, on peut citer pour illustrer la conclusion évoquée par P3 à la suite de cette étude :

P : Pour résoudre graphiquement ce système revient à étudier l'intersection de deux droites
Δ: ax +by +c = 0 et Δ' : a'x +b'y +c' = 0
Pour cela tracer Δ et Δ' et lire sur le graphique les coordonnées du point commun au deux droites et écrire l'ensemble des solutions.
Activité
Résoudre graphiquement

$$S \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

E : madame je passe
P : oui on va commence par tracer ces droites comme on a fait la dernière foisE5 : on fait les tableaux et le repère
Δ: x +y = 3

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 3 | 2 |

Δ' : x - y = 5

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | -5 | -4 |

P : donc quels sont les coordonnées du point d'intersection ?
E : on trouve M ( 4, -1)
P : bien c'est donc la solution du système obtenu graphiquement on va voir d'autres cas, vous écrivez (P prend la main pour écrire au tableau) :
S = {(4, -1)}.

**Conclusion**
La résolution d'un tel système revient à étudier l'intersection de deux droites :
Si les deux droites sont strictement parallèles, aucune solution.
Si les deux droites sont sécantes, une seule solution.
Si les deux droites sont confondues, c'est toute la droite.

Notons toutefois l'absence d'une interrelation entre les techniques de résolution algébrique et graphique dans l'organisation mathématique développée par P3. Les types de tâches proposés ou choisis concernent l'une ou l'autre des résolutions. Notons d'ailleurs que P3 n'a pas fait le choix d'étudier dans le registre algébrique (tout comme le manuel) un système d'équation admettant une infinité de solutions malgré la volonté de certains élèves de connaître la formulation algébrique de l'ensemble des solutions, P3 fait d'abord la « sourde oreille » puis suggère sans s'attarder une formulation de la réponse en toutes lettres :

P : on obtient des droites ?
E2 : égales
P : non on dit confondues, c'est quoi donc l'intersection ?
E : bouhaaa
P : l'intersection c'est tout simplement toute la droite
E1 : comment on écrit l'ensemble de solutions madame ?
P : vite vous écrivez méthodes de résolution par le calcul
E : Madame l'ensemble S des solutions
P : vous écrivez le système possède une infinité de couples solutions vérifiant les deux équations, allez...

***Un topos de l'élève relativement limité***

Dans quasiment toutes les activités proposées au cours de ces séances consacrés à ces deux thèmes d'étude, le topos de l'élève nous parait confiné dans l'application de tâches isolées qui sont convoquées par l'enseignante dans l'immédiat : des transformations algébriques, des résolutions d'équations à une inconnue ou des représentations graphiques de droites affines ou d'ensembles de solutions qui sont des connaissances mobilisables par les élèves ou devenues mobilisables grâce à la dynamique ancien/ nouveau relevée au niveau du processus d'enseignement-apprentissage. Les sous tâches proposées par l'enseignante sont souvent laissés à la charge des élèves, sans se focaliser sur un élève particulier. Ces tâches concernent surtout les techniques graphiques récemment rencontrées au sein des thèmes concernés, voire même des activités. Nous pouvons constater que le topos de l'élève « s'étend» au fil de l'étude. C'est cette dynamique ancien / niveau qui engendre une évolution de la position élève, mais cette évolution reste limitée à certains types de tâches valorisés par l'enseignante comme le cas de la représentation graphique des solutions d'une équation à deux inconnues ou d'un système d'équations à deux inconnues.

E : madame je passe
P : oui on va commence par tracer ces droites comme on a fait la dernière fois
E5 : on fait les tableaux et le repère
$\Delta_1$: x +y = 3

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 3 | 2 |

$\Delta_2$ : x - y = 5

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | -5 | -4 |

P : donc quels sont les coordonnées du point d'intersection ?
E : on trouve M (4, -1)
P : bien c'est donc la solution du système obtenu graphiquement on va voir d'autres cas, vous écrivez (P prend la main pour écrire au tableau) :
S = {(4, -1)}.

Nous avons par ailleurs constaté au cours des séances d'observation, que les élèves sont très à l'aise pour s'exprimer ou intervenir publiquement avec la jeune stagiaire mais qu'ils attendent souvent l'explicitation du contrat didactique en jeu pour accomplir la tâche demandée malgré le fait que l'enseignante leur accorde un moment de dévolution de la tâche, ce qui réduit considérablement leur autonomie et limite leur topos.

P : maintenant on veut représenter l'ensemble des solutions, est ce qu'on va chercher x en fonction de y ?
E : non y en fonction de x
P : quelles sont d'abord les étapes ? L'équation du premier degré doit apparaître est ce que je peux représenter comme ça les solutions ? Est ce que c'est clair pour vous ?
E : non
P : alors il faut développer et simplifier l'écriture
P écrit au tableau et les élèves suivent et recopient en même temps sur leurs cahiers
2x +2y -3 = 3x + 3y +2
Sig 2x -3x +2y -3y -3-2 = 0
Sig -x –y -5 = 0…

Nous avons également remarqué que le topos laissé à l'élève reste dans le chemin tracé des attentes de l'enseignante. Il n'y a pas lieu d'envisager d'autres stratégies de résolution ou de mobiliser un autre type de raisonnement que celui qu'elle-même paraît avoir envisagé dans sa préparation, alors que l'analyse *a priori* de certaines situations du manuel pouvait pourtant suggérer d'autres procédures numériques ou arithmétiques. Nous avons remarqué à plusieurs reprises que P3 laisse finalement peu de liberté aux élèves pour envisager d'autres solutions et propose assez souvent des « modèles » de résolution au tableau :

P : bon donc la question d'après, on vous demande de multiplier la première par 3, vous l'avez fait ?
E : non madame
P : tu retournes à ta place Maroua allez faites le
P : bon on prend le système vous suivez (P écrit au tableau)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$$

Equivalent

$$\begin{cases} 15x + 6y = 9900 \\ -15x + -20y = -12000 \end{cases}$$

P : puis on fait la somme pour trouver y

E3 : pourquoi la somme madame
P : regarde tu as 15x et - 15x, ils sont opposés et ils vont disparaître en faisant la somme
E1 : comment on fait la somme des équations ?
P : vous suivez, vous allez comprendre (P continue à écrire)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ -14y = 9900 - 12000 = -2100 \end{cases}$$

E1 : pourquoi on la première équation
P : c'est pareil elles sont équivalentes, on prend la plus simple, bon on continue, quatrièmement on vous dit remplacer y par sa valeur dans l'une des équations du système pour trouver x.

***Techniques didactiques de P3***

Les gestes professionnels de P3 se caractérisent au cours des séances observées par des régulations qui possèdent un style propre, tout en suivant une ligne et une configuration générique en rapport avec les prescriptions de la réforme « moderne ». Certaines régulations sont planifiées d'avance comme celles liées au travail graphique, celles en rapport avec le type de tâche résolution algébrique se voient moins et sont parfois gérées dans l'immédiat suite à une perturbation de la relation didactique.
Nous commençons par rendre compte en premier lieu des caractéristiques du fonctionnement didactique de P3 en rapport avec le type de tâche résolution graphique en mettant en évidence certains gestes invariants pour les deux thèmes d'étude en question.

**Une problématisation du travail graphique**

***Des gestes de dévolution et d'ajustement***

Le mode de gestion des interactions avec la classe présente certaines caractéristiques qui, semblent se rapprocher de ce qu'on a pu observer dans la mise en place des praxéologies autour de la mise en équation et qui semblent développer un rapport au travail graphique comme une connaissance, enjeu d'enseignement.
En effet, par opposition à P1, la principale caractéristique relevée dans notre analyse des séances peut être décrite en termes de problématisation du travail graphique. Bien que cet aspect ne soit pas explicite dans le chapitre (du manuel) consacré à ces deux thèmes, la jeune stagiaire se permet une marge de liberté et apporte des ajustements aux organisations mathématiques et didactiques suggérées de façon à mieux appréhender les activités du manuel comme c'est le cas pour l'activité 3 ou l'activité 13 . Ces régulations sont accompagnées d'une dynamique interactive dans la classe sur le plan des négociations des savoirs en jeu. Ainsi même si le mode de gestion de l'enseignante nous parait proche de l'ostension déguisée par les gestes d'anticipation, de planification et d'explicitation, elle parvient de manière conscientisée à contrôler les situations

évoquées par ces activités. P3 met en œuvre une technique didactique qui permet de réguler les échanges qui se rapproche de celle relevée au niveau de la pratique de P2 : les techniques relatives au travail graphique glissent progressivement dans le topos de l'élève. Parmi les gestes professionnels de P3 qui caractérisent aussi son fonctionnement didactique, nous relevons :

***Des gestes d'anticipation et de réduction des difficultés***

Les tâches assignées aux élèves autour de la résolution graphique sont toujours précédées par un découpage en sous- tâches. Cette stratégie semble permettre une réduction des difficultés liées au travail graphique et une explicitation de la technologie qui sous tend le passage du registre algébrique au registre graphique. Comme en témoigne l'extrait de transcription suivant :

P: allez- y vous tracez les droites, on gradue d'abord le repère, travaillez sur vos cahiers n'attendez pas que ce soit fait au tableau.
P : alors $D_1$ d'équation : $x+3y-1 = 0$ et $D_2$ d'équation $-2x +y -12 = 0$, maintenant pour le point d'intersection
E : graphiquement madame ?
P : est ce que le point d'intersection est clair sur le graphique ou non ?
E : oui
P : alors si je peux lire clairement sur le graphique je réponds sinon je fais le calcul ...

***Des gestes de rappel et de retour sur les connaissances mobilisables***

Ainsi dans tous les épisodes en rapport avec ce type de tâche, la technique didactique de P3 consiste à s'appuyer sur la mémoire collective de la classe, par une stratégie reposant sur un contrat de rappel (Brousseau 1996, p .28) des apprentissages antérieurs des élèves dans le registre graphique : coordonnées d'un point dans un repère, expression algébrique de fonctions affines et représentations graphiques.

P : oui Amel au tableau, qu'est ce que cela vous rappelle ?
E : fonction affine madame
P : oui donc comment on représente ?
E : On choisit deux points pour la droite
P : alors Amel tu commences

Ces gestes lui permettent de rendre d'une part visible ce qui n'est pas explicité du point de vue institutionnel et d'autre part d'installer une dialectique ancien/ nouveau au fur et à mesure qu'elle avance dans son projet d'enseignement :

P: je vous ai déjà dit qu'une équation du premier degré à deux inconnues est de la forme
$ax + by +c = 0$.
P : si on veut maintenant représenter l'ensemble des solutions
E1 : on a dit la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine
P : attention on a vu dans les chapitres précédents les fonctions affines et linéaires, je veux comprendre si je veux exprimer y en fonction de x
E2 : on a besoin de deux points.

***Des gestes de décontextualisation***

Contrairement à ce qu'on a pu observer dans la pratique de P1, le fonctionnement didactique de P3 ne se limite pas à une exécution de tâches isolées sans une reconstitution des connaissances et d'un plan théorique permettant de concevoir le fondement de la technique graphique en jeu. Que ce soit au sein du thème « équation ou système d'équations », P3 procède à une décontextualisation des connaissances autour de la résolution graphique en se permettant d'apporter une synthèse de ce qui a été mis en avant dans l'activité ou un résultat qui généralise la procédure mise en place :

P : qu'est ce qu'on remarque ?
E : alignés
P : très bien les points sont alignés. Vous écrivez la représentation graphique des points de coordonnées (m,n) est une droite d'équation m+2n = 0 , qui passe par l'origine, P : on généralise : La représentation graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues est une droite.

***Une illusion d'évidence et une ostension assumée***

En ce qui concerne la praxéologie liée au type de tâche « résolution algébrique » nous avions relevé certaines caractéristiques du fonctionnement didactique de P3 qui semblent montrer que l'enseignante n'ait pas problématisé certains aspects du travail algébrique notamment la recherche de couples solutions d'une équation à deux inconnues prenant appui sur un contexte numérique et le discours technologique qui justifie les techniques de résolution algébrique des systèmes d'équations. Son mode de fonctionnement didactique dans ce cas nous parait relever de l'ostension assumée.

P : regarder si on fait la différence des égalités qu'est ce qu'on trouve ?
E1 : 4N - 3N
P : oui égal quoi ?
E : bouhaaa
P : attendez on va l'écrire au tableau, (P3 écrit)
4N - 3N = ( R + 3) – (R – 3)
P : c'est clair ? je continue, on trouve
4N - 3N = R + 3 –R + 3
N = 3 +3
N = 6
P : comment on fait pour trouver R ?
E : la somme madame
P : N et R vérifient les deux équations en même temps, il suffit de remplacer N dans l'une des équations allez vous suivez :
3x 6 = R – 3
Sig 18 = R – 3
Sig R = 18 + 3 = 21.

# III. Conclusions

En résumé, nous nous trouvons face à une pratique d'enseignante débutante qui met sur le devant de la scène didactique la résolution de problèmes, un point qui la rapproche de P2. Incontestablement, elle accorde à la mise en équation une part centrale dans l'organisation mathématique autour des équations et des systèmes d'équations ce qui semble aller dans le sens des attentes institutionnelles modernes. Les tâches évoquées par les activités du manuel qu'elles soient élémentaires ou quelque peu problématiques, font l'objet d'un accompagnement systématique et de nombreuses aides. En analysant le contenu de ces aides, nous avons montré qu'elles avaient pour fonction d'expliquer l'énoncé, d'en dégager les informations utiles et de faire émerger des méthodes de résolution explicites et ce, dans le but de permettre un travail autonome des élèves. Ainsi afin de rendre possible le travail en autonomie des élèves, l'enseignante adapte la tâche prescrite au niveau des élèves et les aide avant de les mettre au travail. En outre, elle n'hésite pas à résoudre une partie de la tâche avec la classe.

Contrairement à P1, on constate une volonté de la part de P3 de mise en autonomie des élèves, qui se lit à travers les moments de recherche individuelle aménagés et plus globalement la liberté d'intervention des élèves pendant les échanges collectifs et publics. Toutefois le *topos* de l'élève reste « balisé » ou restreint. L'enseignante anticipe nettement les stratégies de résolution algébrique et évacue toute problématique autour de la démarche de résolution algébrique qui aurait pu être liée à une dialectique entre arithmétique et algébrique. Et ce en usant de techniques didactiques relevant de l'ostension parfois déguisée.

Ce mode de fonctionnement didactique de P3 semble se confirmer au niveau de l'organisation mathématique développée autour de la résolution algébrique. Nous avons en effet, souligné l'absence de résolution algébrique d'une équation à deux inconnues, la naturalisation de la notion de couple solution, l'absence de certains enjeux liés par exemple au fait qu'une équation du premier degré à deux inconnues possède une infinité de solutions ou encore à l'équivalence logique des systèmes d'équations. De plus, la pratique de P3 montre l'absence d'une dialectique entre registres arithmétique, numérique et algébrique qui peut éclairer le fait que l'enseignante « guide » fortement les élèves dans l'accomplissement des techniques de mise en équation.

Nous avons par ailleurs relevé des phases de recherche individuelle très courtes, voire inexistantes et une individualisation des aides apportées par l'enseignante. Cette individualisation systématique des activités proposées se traduit par des activités algorithmisées, parcellisées, et s'accompagne au quotidien d'un abaissement des exigences de la part du professeur. Ainsi et contrairement à ce qu'on a pu relever dans la pratique en classe de P1, les organisations mathématiques effectivement enseignées autour de la résolution algébrique d'équations ou de systèmes d'équations sont développées conformément au manuel, elles ne sont pas problématisées par P3 puisque les techniques mathématiques mises à l'œuvre sont plutôt faibles voire cachées pour ce qui est des équations à deux inconnues. Aucun discours technologique justifiant la recherche des couples solutions d'une équation à deux inconnues ou l'équivalence des systèmes d'équations n'apparaît. Le topos de l'élève reste très restreint, c'est l'enseignante qui prend souvent en charge la résolution faisant essentiellement appel à des procédures ostensives.

Quant à l'organisation mathématique autour de la résolution graphique des équations et des systèmes d'équations,, bien qu'elle soit valorisée par la réforme au vue de l'ensemble du domaine, elle n'en demeure pas plus explicitée que celle liée à la mise en équation notamment dans le chapitre relatif à ces thèmes d'étude. Pourtant ces organisations mathématiques du savoir à enseigner autour de la résolution graphique sont bien mises en évidence dans les organisations mathématiques et didactiques développées par P3. Elles font l'objet d'un développement et d'un approfondissement en plus d'un discours technologique qui, vient argumenter la conversion du registre du registre algébrique vers le registre des représentations graphiques en passant par les connaissances des élèves autour des fonctions affines. Les techniques mathématiques déployées sont fortes et laissent plus la possibilité aux élèves d'articuler leurs connaissances.

La technique didactique dès lors donnée à voir par l'enseignante stagiaire s'appuie essentiellement sur la construction d'une mémoire collective[29] et sur un contrat

[29] Comme le soulignent Matheron et Mercier : « Nous avons montré comment la construction d'une mémoire publique pouvait passer par l'activation de souvenirs relatifs à différentes couches de la pratique antérieurement mise en oeuvre par les élèves, sous l'impulsion du professeur. Le moyen en est l'ostension, qui s'appuie sur la mise en texte du savoir enseigné (Chevallard, 1991 ; Chevallard et Mercier, 1987).

La production de mémoire publique est un processus de reconstruction de l'histoire, dirigé vers la classe, sous la direction du professeur en collaboration avec certains élèves. C'est un processus de sélection des didactique stipulant que les élèves puissent mobiliser des savoirs anciens mais relativement récents. Ces gestes de P3 sont également accompagnés de décontextualisation et de recontextualisation des connaissances et de phases de synthèse, de bilan et d'institutionnalisation spécifiques à la mise en œuvre de cette organisation mathématique.

pratiques du savoir pertinentes pour l'étude actuelle. Face à ce procédé d'enseignement, les élèves sont actifs de diverses manières »( Matheron, Mercier 2004, p. 355-377).

# Conclusions et Perspectives

# Conclusions et perspectives

Une réforme, un nouveau programme, de nouvelles approches, une nouvelle organisation de l'étude, quoi de plus pour déstabiliser tout enseignant qui, dans sa pratique, a développé des routines, des habitudes ou des façons de faire qui lui permettent de croire que ses élèves apprennent. Les innovations ou changements apportés par une réforme du curriculum scolaire impliquent-ils systématiquement les changements attendus au niveau des pratiques enseignantes ?

L'objet de cette thèse était précisément d'étudier l'impact effectif d'une réforme récente des programmes scolaires tunisiens sur les pratiques de professeurs expérimentés. Revenons sur le questionnement initial qui nous a conduite à mener ce travail.

Notre ambition première était de cerner les effets potentiels de la réforme du curriculum officiel lié à un domaine particulier (celui de l'algèbre élémentaire) enseigné à un moment donné de l'institution scolaire tunisienne (à l'occasion de l'entrée au lycée), sur les pratiques enseignantes. Ce point de départ nous a amenée d'emblée à situer le premier volet de notre recherche dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique pour étudier ce que nous avons appelé les perturbations *exogènes* du système d'enseignement ,du point de vue des changements prescrits dans les organisations praxéologiques mathématiques et didactiques du savoir à enseigner. L'étude que nous avons conduite dans ce cadre à partir des manuels et des programmes de différentes périodes d'enseignement a visé à renseigner la question des pratiques officielles d'enseignement de l'algèbre à l'entrée du secondaire, susceptibles d'influencer les pratiques effectives des professeurs. Nous avons considéré ces pratiques institutionnelles comme des organisations mathématiques et didactiques *de référence* pour les professeurs.

Le deuxième volet de notre recherche s'est centré sur l'étude des pratiques effectives d'enseignement de l'algèbre en première année du secondaire. L'entrée choisie pour ce deuxième empan de notre travail est liée à une thématique intitulée « routines et régulations », située au carrefour de différentes approches théoriques. Nous utilisons d'une part la Théorie Anthropologique pour éclairer la dimension institutionnelle des pratiques enseignantes étudiées en situant ces pratiques par rapport aux pratiques institutionnelles, dites de référence. Cette approche qui recourt à la question du rapport aux savoirs pour l'inscrire dans une problématique institutionnelle nous a permis d'identifier le rapport personnel des enseignants aux savoirs en jeu, comme produit de sélections, de restrictions, de concessions, d'oublis faits à propos des divers rapports institutionnels auxquels les enseignants sont confrontés. D'autre part, en nous référant aux travaux sur l'action enseignante de Sensevy et al. (2002), précisément ce que l'on appelle « modèle de l'action didactique de l'enseignant », nous étudions les techniques didactiques mises en œuvre par les enseignants se traduisant par des suites de gestes répétés, ou bien liées à la topogénése (genèse des positions respectives de l'élève et de l'enseignant). Cette notion constitue un descripteur de la coopération entre l'enseignant et les élèves dans la classe sur la base d'une analyse des savoirs en jeu. Elle focalise le regard sur ce que l'on pourrait désigner comme un système de rôles dans l'action conjointe, ou de places dans la relation. Ces rôles, ou places, nécessitent, pour être décrits, une analyse épistémique, c'est-à-dire une analyse des savoirs en jeu.

Nous empruntons également à la théorie des situations didactiques : soit pour caractériser les interactions entre élèves et professeurs (en utilisant la notion d'ostension déguisée ou assumée, de contrat didactique), soit de façon plus métaphorique afin d'étudier les régulations dans les pratiques enseignantes. Cette étude des perturbations dites endogènes du système didactique s'appuie sur une enquête menée autour des pratiques d'enseignants chevronnés dans leur enseignement de l'algèbre au début du lycée : sur la base de cahiers d'élèves et d'observations dans les classes de trois enseignantes (deux expérimentées et une débutante). Nous revenons sur les principaux résultats de cette enquête plus loin.

### *Une analyse institutionnelle pour cerner les perturbations exogènes*

Cette analyse nous a permis de relever des évolutions dans les praxéologies mathématiques et didactiques liées aux savoirs algébriques, au fil de différentes réformes de l'enseignement de l'algèbre imposant, comme le souligne Chevallard (1994) « *leurs effets jusqu'à aujourd'hui, d'une manière souvent occulte mais bien réelle* ». Pour chaque période d'enseignement considérée, nous nous sommes centrées sur les thèmes « Equations du premier degré à deux inconnues » et « Systèmes de deux équations à deux inconnues ». D'une part, ces thèmes sont constamment mis à l'étude au fil des différentes périodes de l'histoire de l'enseignement, d'autre part les changements d'orientation à leur sujet, suggérés par la réforme moderne nous sont apparus particulièrement visibles. Ces deux thèmes d'étude nous ont semblé emblématiques pour analyser et comprendre les phénomènes liés aux évolutions curriculaires de l'algèbre enseignée au lycée, et pour répondre aux questions plus globales que nous nous sommes posées.

Durant *la période classique* (Programmes des années 1958 - 1968), l'approche d'enseignement de l'algèbre est essentiellement équationnelle avec une articulation entre les deux domaines arithmétique et algèbre qui offre la possibilité d'un « retour au concret » au fil d'un corpus de problèmes « concrets » ou pseudo-concrets à étudier tant par l'arithmétique que par l'algèbre. On constate, par ailleurs, une étude assez approfondie des objets algébriques mobilisés, avec un travail de la technique abondant.

*La réforme des mathématiques modernes* (Programmes des années 1970- 1978) se caractérise par une approche essentiellement « structurelle » des mathématiques, les objets algébriques étant introduits dans un contexte formel et ensembliste, avec l'accent mis sur une théorie mathématique « forte ». L'étude des équations et des systèmes d'équations se centre sur la résolution algébrique. Mais si les techniques de résolution sont fortement mises en avant par un important discours s'appuyant sur les notions de fonction et d'application (dont on peut penser qu'il reste essentiellement à la charge de l'enseignant) pour les légitimer d'un point de vue théorique, le travail à proprement parler de ces techniques paraît nettement appauvri. Notons que dans ce contexte le cadre graphique n'apparaît qu'en aval du cadre algébrique, à titre « illustratif » (pour illustrer des éléments de la théorie).

Durant la *« contre-réforme »* (Programmes des années 1978-1988), le discours théorique ensembliste typique de la période des mathématiques modernes autour de la résolution algébrique des équations et des systèmes d'équations prend une autre forme : on intègre la géométrie analytique pour « donner corps » à ce discours, afin qu'il ne paraisse plus aussi abstrait. Le symbolisme lié à la théorie des ensembles reste toutefois très présent. La mise en équation n'est pas totalement évacuée du savoir à enseigner (alors que c'était le cas dans la réforme précédente) ; elle occupe une certaine place à travers la résolution de problèmes concrets et géométriques, étudiés en aval.

Durant la période de la *réforme contemporaine* (Programmes des années 1988-2002), les rapports institutionnels aux objets algébriques sont marqués par une nouvelle perspective d'enseignement : c'est la dimension « outil » de l'algèbre qui devient prépondérante au sein des organisations mathématiques du savoir à enseigner. Cette nouvelle approche se caractérise par le fait que les objets algébriques (équations, inéquations, systèmes d'équations...) apparaissent d'emblée comme des outils de modélisation de situations de la « vie courante ». Mais le travail de modélisation reste limité : il est souvent guidé par la donnée préalable des grandeurs étudiées et désignées par des lettres. Toutefois, il semble bel et bien exister des dialectiques explicites entre registres sémiotiques, arithmétique, algébrique et fonctionnel qui sont guidées par les énoncés ou les consignes des activités introductives du manuel. Le travail des techniques de résolution algébrique occupe une place relativement importante, tout en s'accompagnant de justifications technologiques explicites et institutionnalisées. Le travail graphique joue un rôle moins important mais il fait l'objet d'un discours technologique explicite en rapport avec les fonctions affines.

La période de la « réforme moderne » (programmes 2002 applicable depuis 2004) se caractérise entre autres par l'importance donnée à la modélisation de situations concrètes et fait appel à d'autres domaines : sciences économiques, physique, chimie... L'accent est également mis sur une approche plus fonctionnelle de l'algèbre, ce qui donne d'ailleurs au travail dans le cadre graphique, une importance nouvelle.
Enfin et surtout, de nombreuses activités introductives mettent en avant une étude simultanée des organisations mathématiques autour de la résolution (qu'elle soit algébrique ou graphique) et de la mise en équation. Ces activités qui « prolifèrent » suggèrent des dialectiques entre les différents registres sémiotiques mis en jeu : graphique, algébrique et numérique. Mais ces dialectiques restent pour une grande part implicites : on ne voit aucune trace d'un discours technologique tenu sur les passages d'un registre à l'autre, pourtant convoqués au fil des différentes activités du manuel officiel. Les attentes institutionnelles à ce sujet restent muettes. Le discours qui reste explicitement à la charge de l'enseignant se concentre sur la présentation des objets algébriques « nouveaux », découverts au fil de toutes ces activités. L'exposé morcelé

des savoirs algébriques (qui ne sont pas rassemblés dans un « cours » mais apparaissent en marge des activités préparatoires ou d'exercices résolus) consiste en une présentation avant tout ostensive et « naturalisée » de ces savoirs, sans grand discours technologico-théorique pour en légitimer ou en justifier l'existence.

Tous ces changements constatés dans les organisations mathématiques du savoir algébrique à enseigner d'une période d'enseignement à l'autre vont de pair avec des évolutions marquées dans l'organisation de l'étude et dans les rôles impartis au professeur et à l'élève dans l'étude. Notamment, au fil des deux dernières réformes de l'enseignement tunisien, semble devoir s'opérer un important glissement topogénétique « du professeur vers l'élève ». L'apparition, puis la prolifération constatée d'activités introductives suggérant une part d'activité nouvelle de l'élève dans la découverte et la problématisation de nouveaux savoirs vont dans ce sens. Tout comme la diminution et l'éparpillement visible d'un texte de savoir disséminé au fil des activités dans le manuel officiel de la réforme moderne suggère un nouveau rôle à jouer pour le professeur. Ce nouveau rôle de l'enseignant comporte selon nous, d'ailleurs une part importante d'implicite. Quels éléments constituent un « guide » pour un professeur dans l'accompagnement de l'activité de ses élèves et l'émergence des savoirs visés au fil des différentes activités introductives proposées par le manuel officiel ? La réforme moderne nous a semblé comporter de nombreuses zones d'ombre à ce sujet, nous suggérant parfois l'existence de « vides institutionnels » au sein des organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner (au sens de Bronner 1997).

Ainsi le questionnement didactique ne peut se satisfaire du seul repérage de ces mouvements exogènes et de leurs effets sur l'organisation des contenus à enseigner. Il convient alors d'explorer les différents modes de gestion et d'appropriation de ces contenus et d'explorer la manière dont les professeurs investissent ces contenus à l'aune des contraintes institutionnelles qui pèsent sur leurs pratiques, car la problématique doit permettre de saisir les mouvements endogènes.

## Une analyse des pratiques enseignantes pour cerner les perturbations *endogènes*

Notre enquête sur les pratiques enseignantes dans ce contexte de réforme de l'enseignement tunisien est amorcée par une étude d'extraits de cahiers d'élèves. Nous avons utilisé ces cahiers comme des révélateurs de pratiques de professeurs expérimentés (ayant entre 15 et 20 ans de métier).

Cette première étude révèle tout d'abord une forte stabilité de pratiques enseignantes typiques de périodes d'enseignement pourtant anciennes, type réforme ou contre-réforme, qui correspondraient aux périodes vécues par les enseignants concernés, lors de leurs premières années d'exercice. Leurs pratiques seraient dès lors « peu transformées » ou marquées par les deux dernières réformes entrées en vigueur. L'étude reste ainsi organisée essentiellement autour de la dimension objet des savoirs algébriques à enseigner ; les techniques de résolution algébrique mises à l'étude font l'objet d'un discours théorique qui reste important, soutenu par des contenus formels explicites. En revanche, les techniques de résolution graphique (présentes à titre principalement illustratif des techniques algébriques) ou la mise en équation de problèmes (absente) sont loin d'occuper la place attendue.

Cette forme de résistance au changement révèle la difficulté apparente de nombreux enseignants porteurs d'un héritage culturel (mathématique et didactique) à adhérer à des innovations importantes pourtant prescrites par l'institution au travers d'une réforme. Ce constat nous paraît d'autant plus fort dans le contexte de l'enseignement secondaire tunisien que la présence d'un manuel officiel « unique » aurait pu nous laisser croire à un système de contraintes explicites imposant une « unique » façon de faire aux enseignants concernés - par contraste avec d'autres pays où, pour une même réforme du curriculum, plusieurs manuels existent, et représentant des alternatives éventuelles de pratiques, plus ou moins conformes aux attentes institutionnelles. Le détournement fort d'organisations mathématiques du manuel officiel par certains des enseignants « résistant » au changement (qui ne retiennent, par exemple, des problèmes à mettre en équations, que les équations ou les systèmes d'équations qu'ils donnent directement à résoudre à leurs élèves), ainsi que l'importation d'organisations mathématiques du savoir à enseigner sans lien aucun avec ce manuel, révèlent les libertés prises par les enseignants expérimentés dans ce décor institutionnel. Ceci nous amène d'ailleurs à l'instar de travaux récents (comme ceux de Margolinas et Assude 2005) à s'interroger sur le rôle des manuels scolaires et leur utilisation par les enseignants, dans un contexte de réforme.

Deux des dix cahiers analysés se sont toutefois démarqués : l'un donnant à voir des organisations mathématiques et didactiques typiques de la période d'enseignement dite contemporaine, l'autre révélant un enseignement apparemment fidèle à la réforme moderne.

Ainsi les pratiques de l'enseignante que nous avons nommée P2, révélées par l'analyse du cahier de *Ramzi,* auraient fait l'objet d'adaptations importantes à l'occasion de la réforme précédente (période dite contemporaine) sans toutefois, intégrer dans l'immédiat, les changements prescrits par la réforme actuelle. Tandis que les pratiques données à voir par l'enseignante que nous avons nommé P1, révélées par l'étude du cahier de *Siwar* nous ont semblé conformes à l'organisation de l'étude prévue dans le manuel officiel moderne.

A la lumière des résultats obtenus dans cette étude et dans le cadre de notre problématique, nous avons choisi de nous intéresser aux pratiques effectives de ces deux enseignantes en allant les observer dans leur classe : tout au long de leur enseignement autour des thèmes d'étude choisis, pendant deux années consécutives pour P1, et à l'occasion d'une seule année pour P2. Nous souhaitions nous interroger plus avant sur les aspects de conformité ou de non-conformité ou d'évolution des pratiques données à voir par ces deux professeurs aux organisations mathématiques et didactiques prescrites par la nouvelle réforme :

- Quelles pratiques d'enseignement sont données à voir des professeurs P1 et P2 , lors de l'entrée en vigueur de la réforme moderne, et de l'année suivante pour P1 ? Quelles évolutions constate-t-on et pour quelles raisons ?
- Quels sont les aspects de conformité ou de non-conformité de ces pratiques aux organisations mathématiques et didactiques prescrites par la nouvelle réforme ?

Par ailleurs,, il nous a semblé intéressant de mettre en regard l'analyse de ces pratiques de professionnelles chevronnées avec celles d'une enseignante débutante, dont l'enseignement s'appuie visiblement sur les contenus de savoir à enseigner prescrits par la réforme moderne. Ceci nous a permis de prendre du recul sur certains des phénomènes observés dans la classe de P1 et d'avoir un éclairage différent sur ses choix didactiques ou mathématiques. Notamment, d'observer si les pratiques d'enseignement données à voir par P1 et l'organisation de l'étude telle qu'elle est prescrite par la réforme moderne, sont corrélées ou non ? La recherche de similarités ou de différences dans les pratiques données à voir par P1 et par l'enseignante débutante surnommée P3 nous aide à apporter des éléments de réponse à cette question.

L'ensemble de ces analyses montre *in vivo* différentes formes d'adaptation à la réforme moderne, que nous précisons, et nous conduit à interroger les contraintes et les conditions qui pèsent sur la *diffusion* d'une réforme dans les pratiques enseignantes.

## Les pratiques de P1 : Quelles formes d'adaptation des pratiques et quelles conformités aux praxéologies de référence ?

Les résultats obtenus par l'étude des pratiques de l'enseignante P1, année 1, illustrent, par différents aspects, ce que nous avons qualifié de ***conformité de surface*** aux organisations didactiques et mathématiques mises en texte dans le manuel officiel. L'enseignante reprend les activités ou les bribes de discours technologico-théorique de l'ouvrage presque « tels quels » mais ses interventions didactiques semblent souvent modifier le projet didactique global attendu. Par exemple, sa gestion déséquilibre fortement les dialectiques prévues entre les techniques arithmético-numériques ou graphiques et les techniques algébriques, les premières étant d'emblée rendues muettes ou très faibles. Seules les techniques algébriques apparaissent sur le devant de la scène didactique. La présentation de ces techniques donne d'ailleurs parfois lieu à l'ajout d'ostensifs symboliques (comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations), sans que ceux-ci ne fassent l'objet d'une explicitation quelconque. Nous avons interprété ces rajouts spontanés de symboles, comme des résidus des anciennes réformes qui mettaient davantage l'accent sur cette dimension symbolique du travail algébrique qu'il n'est prévu dans le curriculum officiel. L'organisation de l'étude visiblement attendue par les auteurs du manuel officiel, qui sous-entendent un important déplacement topogénétique « vers l'élève » au fil des activités proposées, est loin de ce qui est développé au niveau de la pratique. La répartition des rôles entre enseignant et élève vis-à-vis des savoirs est invariante : le *topos* de l'élève se résume *a maxima* à la mobilisation de techniques algébriques déjà étudiées suivant un découpage prédéterminé par l'enseignante.

L'analyse des pratiques de P1, année 2 montre toutefois certaines évolutions que nous pourrions qualifier de « rapprochantes » de la réforme moderne données particulièrement à voir au travers des liens effectués au fil de son enseignement entre numérique, graphique et algébrique. Les passages d'un registre à l'autre sont davantage problématisés l'année 2, avec le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre, amorcé plus « en douceur » par l'enseignante, moyennant certaines représentations symboliques (tableaux, ostensifs symboliques, équations de droites). Ces évolutions peuvent s'interpréter en termes de régulation : elles viennent pour une part répondre à des épisodes à résonance forte que nous avons observés et analysés pendant l'année 2005-2006.

D'autres aménagements sont entrepris par P1 par le biais de l'introduction d'ostensifs (ensemble de solutions, produit cartésien d'ensemble, équation cartésienne et réduite de droites…) qui ont pourtant disparu des programmes actuels. La dimension ostensive du travail algébrique réapparaît ainsi l'année 2 de manière accentuée. Il semble que l'enseignante poursuive un double objectif en accentuant ainsi la présence et le rôle joué par ces ostensifs. Il s'agit sans doute pour elle de renforcer la légitimité des savoirs algébriques introduits.

Les pratiques de P1 apparaissent par ailleurs « routinières » et d'une remarquable stabilité d'une année à l'autre. Ainsi, les techniques de mise en équation restent globalement masquées par sa gestion didactique pendant les deux années : P1 fait lire l'énoncé par un élève, fait passer un deuxième élève au tableau pour lui dicter la réponse, ce dernier servant de « porte-craie » sur cette phase de l'activité, malgré une volonté parfois apparente de certains élèves souhaitant intervenir publiquement pour l'accomplissement de ce type de tâche.

Les résultats obtenus pointent ainsi une forte stabilité de la composante médiative (Robert 2007) chez P1 qui résiste visiblement à laisser davantage de place à l'activité de l'élève, malgré le fort glissement topogénétique suggéré par la réforme. Ceci peut d'ailleurs être à l'origine de difficultés d'adaptation aux organisations mathématiques et didactiques de référence déjà évoquées, et soulève de nombreuses questions en rapport avec la perméabilité ou l'imperméabilité des pratiques enseignantes à une réforme donnée.

## Les pratiques de P2 : Quelles formes d'adaptation des pratiques et quelles conformités aux praxéologies de référence ?

La pratique de la deuxième enseignante expérimentée nommée P2 montre une reprise de la majorité des activités du manuel officiel correspondant au manuel de la période d'enseignement précédente, dite contemporaine. Contrairement à P1, l'activité de mise en équation apparaît effectivement au fil des activités traitées par l'enseignante comme un enjeu explicite d'enseignement. Ce travail de mise en équation fait ainsi toujours l'objet d'un travail collectif, avec la participation quasi-totale de la classe, même pour la modélisation de situations élémentaires. Certes les données sont souvent disponibles dans l'énoncé du problème et les démarches, plus dirigées, mais on note toutefois un questionnement permanent de l'enseignante P2 relatif à l'accomplissement des différentes sous-tâches de mise en équation.
Un autre point important concerne la gestion des organisations mathématiques autour de la résolution algébrique et la dialectique à l'œuvre avec le registre numérique, mobilisée pour introduire ces nouveaux objets de savoir. P2 fait apparaître les objets d'enseignement « équations à deux inconnues » et « systèmes de deux équations à deux inconnues » comme « outils » de résolution de problèmes, en prenant toujours appui sur le registre numérique, et en suivant une évolution progressive des ostensifs symboliques (couples de nombres solutions, formulation de l'ensemble des solutions d'une équation à deux inconnues…). En outre, l'enseignante aménage le passage du registre arithmétique au registre algébrique et amène les élèves à se détacher progressivement du contexte numérique pour envisager des techniques algébriques. Les dialectiques entre registres arithmétique et algébrique sont souvent objet d'explicitation et d'un questionnement travaillé avec les élèves, ce qui contraste avec les pratiques données à voir par P1, tant pour l'année 1 que l'année 2.

Ainsi, si les organisations mathématiques et didactiques développées par P2 autour des objets algébriques- ici les équations et les systèmes d'équations à deux inconnues- paraissent, « en surface », plus éloignées de la réforme moderne, *en substance*, l'enseignement qu'elle délivre est globalement plus conforme aux attentes actuelles de l'institution et ceci à plusieurs points de vue : le *topos* de l'élève paraît nettement plus important, l'enseignante délègue plus de responsabilité aux élèves, notamment dans la modélisation des situations évoquées par les activités avant de passer à la résolution. Son mode de fonctionnement didactique met plus l'accent sur la construction autonome des apprentissages. La mise en équation est plus appréhendée par l'enseignante comme processus de modélisation que comme un type de tâche motivant l'introduction de nouvelles connaissances. Un autre point de rapprochement aux praxéologies de référence mis en avant dans notre analyse des pratiques de P2 concerne les interrelations entre équations et fonctions affines qui apparaissent à travers les tâches rajoutées par l'enseignante. Ces tâches mettent en jeu des recours à des connaissances anciennes, des intermédiaires à introduire et des dialectiques entre registres sémiotiques.

Ainsi, nous identifions ici un paradoxe : alors que P2 semble mettre à l'étude des organisations mathématiques davantage référées à la période contemporaine qu'à la période moderne (de par les organisations didactiques mises en œuvre qui placent davantage l'élève au cœur des situations d'apprentissage), ses pratiques semblent « sur le fond » davantage conformes aux attentes institutionnelles modernes dans un souci permanent de dialectique explicite et contrôlée entre les différents registres sémiotiques que celles de P1 , malgré les quelques réaménagements apportées par celle-ci aux organisations mathématiques ,pour mettre en avant le travail graphique en conformité avec le programme « moderne ». C'est pourquoi nous qualifions cette forme d'adaptation comme une « ***conformité en profondeur*** » à la réforme moderne, contrairement à la « conformité de surface » qui caractérise la pratique de P1.

Ces analyses qui ont montré des différences significatives au niveau des pratiques et des formes d'adaptation différentes à la réforme ne nous donnent cependant pas les moyens d'apporter des explications à l'évolution des pratiques de P1. L'articulation des dimensions institutionnelle et professionnelle des pratiques nous a permis d'appréhender certains phénomènes repérés sous l'angle de la visibilité des enjeux ou des « fondamentaux » d'une réforme pour les enseignants.

Nous avons vu dans le cas de cette étude comment, tout en calquant son enseignement sur les organisations mathématiques et didactiques mises en texte dans le manuel officiel, P1 « détourne » une part importante de ces praxéologies de référence, soit parce qu'elles semblent peu compatibles avec des routines de travail qui pèsent fortement sur l'organisation de l'étude et le rôle assigné à l'élève, généralement réduit à un travail sur des connaissances au plus mobilisables (Robert, 1998), soit parce que le professeur ne semble pas percevoir le projet didactique global ou épistémologique qui sous-tend ces organisations mathématiques ou didactiques (approche par la modélisation, accent mis sur les interrelations entre équation et fonction, les dialectiques entre registres sémiotiques). Un tel projet comporte d'ailleurs toujours une part d'implicite. Ici, bien qu'a priori sous-tendues par les activités ou les exercices du manuel officiel, les dialectiques attendues entre différents registres ne sont jamais explicites. Et on peut se poser la question de savoir jusqu'à quel point elles étaient visibles la première année pour P1. L'évolution constatée la deuxième année montrerait une appropriation de cet aspect du projet d'enseignement de la réforme par P1 qui importe, consciemment ou non, des bribes d'organisations mathématiques d'anciennes réformes, comme les ostensifs symboliques utilisés la première année de façon naturalisée. Nous avons eu l'occasion de voir à quel point ce « décor » du travail algébrique fait sans doute partie d'une culture mathématique ancrée chez l'enseignante puisque, loin de revenir dessus, elle importe un discours technologico-théorique visant à en soutenir l'usage par les élèves.

En quoi les postures épistémologiques sous-jacentes à une réforme du curriculum sont-elles rendues visibles pour les professeurs ? Comment les positions relatives à d'éventuelles théories des apprentissages, sont-elles données à voir ?

Pour tenter d'apporter quelques éléments de réponses à ces questions, et en vue de prendre du recul par rapport au choix de P1, nous avons étudié les pratiques d'une enseignante débutante dans sa gestion des organisations mathématiques et didactiques de référence, autour de ces thèmes d'étude. La comparaison de ces deux pratiques, d'une enseignante experte et d'une enseignante novice, nous a permis de montrer des phénomènes induits par des appropriations différentes des intentions didactiques suggérées par la réforme. Les résultats obtenus pointent des « vides » ou des implicites existants au sein de ce projet de réforme. Ces derniers ont trait aux techniques didactiques à mettre en œuvre pour gérer les situations d'enseignement relatives aux activités du manuel, et aux enjeux épistémologiques sous-jacents aux organisations mathématiques du savoir à enseigner.

## Mise en regard des pratiques de P1 et de P3 : Quelles gestions des organisations mathématiques et didactiques de référence ?

Nous avons vu dans le cas de l'étude des pratiques de P1 comment, tout en calquant son enseignement sur les organisations mathématiques et didactiques du manuel officiel, cette enseignante expérimentée « détourne » une part importante de ces praxéologies de référence. Ceci peut s'expliquer par le fait que le professeur ne semble pas percevoir le projet global ou épistémologique qui sous-tend ces organisations mathématiques (approche par la modélisation, accent mis sur les interrelations entre équation et fonction, les dialectiques entre registres sémiotiques) ou didactiques (glissement topogénétique du professeur vers l'élève).

Cela nous renvoie à la part d'implicite d'une réforme du curriculum à savoir, à quel point les attentes institutionnelles sont-elles rendues visibles pour les enseignants ?

Dans le cas présent, à l'occasion du premier volet de notre recherche, nous avions remarqué de nombreux implicites ou « vides » dans les organisations mathématiques et didactiques prescrites par l'institution. Les pratiques enseignantes données à voir par P1 nous ont semblé, pouvoir pour une part, en résulter.

Il nous est dès lors, paru intéressant d'étudier les pratiques de P3, afin d'éclairer ce point, la comparaison des pratiques d'une enseignante expérimentée et d'une enseignante novice nous paraissant susceptible de montrer des phénomènes induits par des appropriations différentes du projet global et épistémologique de la réforme.

Les pratiques données à voir par P3 se distinguent de celles de P1 sur plusieurs points. Par exemple, les techniques déployées pour la résolution graphique des équations et des systèmes d'équations sont « fortes » : elles font l'objet d'un développement explicite en lien avec les fonctions affines. Dès lors, on observe une dialectique entre les registres graphique et algébrique conduite explicitement, à diverses reprises, par la jeune enseignante -alors que c'était loin d'être le cas pour P1.

Par contre, en ce qui concerne l'articulation des registres numériques et algébriques, nous avons noté des difficultés communes de la part des deux enseignantes, qui semblent d'ailleurs aller de pair, pour P3, avec des réticences à accorder à l'élève toute la place attendue dans l'organisation de l'étude.

Ainsi, les organisations mathématiques du savoir algébrique à enseigner apprêtées par P3 se centrent sur des techniques de résolution « algorithmisées ». C'est l'enseignante qui prend souvent en charge la résolution présentant les techniques en question de manière ostensive. Les phases de recherche individuelle des élèves sont d'ailleurs toujours très brèves : P3 donne presque immédiatement des aides individualisées qui se traduisent souvent par un accompagnement systématique du travail des élèves. Au final, tout comme P1, même si cela ne se traduit pas de la même manière (notamment, le fait qu'elle reprenne plus rarement « la main » en collectif directement que P1), P3 prend largement le pas sur le topos de l'élève au fil des activités introductives proposées.
La comparaison des pratiques de P1 et de P3 permet donc de voir à quel point des zones d'implicites, voire des « vides » institutionnels dans les organisations mathématiques et didactiques de la réforme moderne, pèsent sur les pratiques de ces deux enseignantes.

## En guise de conclusion

Les études de cas présentées permettent de pointer des perturbations *endogènes* propres au système institutionnel tunisien, en mettant en avant les effets apparents d'une réforme sur les pratiques des enseignants concernés par notre enquête. Elles montrent plus particulièrement la difficulté à mettre en œuvre les caractéristiques les plus innovantes de cette réforme, de part, les adaptations que les enseignantes ont fait subir à de nombreuses activités et la création de nouveaux gestes professionnels.

Au-delà de résistances fortes constatées chez la majorité des enseignants expérimentés - révélées par l'analyse des cahiers d'élèves, l'étude des pratiques de professeures également chevronnées, mais davantage engagées dans le processus de réforme nous permet d'interroger les capacités d'adaptation des pratiques enseignantes. L'adhésion au projet global épistémologique et didactique d'une réforme du curriculum (qui sous-entend une interprétation correcte de ce projet) joue un rôle prépondérant dans ces adaptations et ces évolutions de pratiques. La mise en regard des pratiques de P1 et de P2 nous a paru tout à fait éclairante de ce point de vue, le paradoxe étant que les pratiques de P1, pourtant davantage calquées ou inspirées du manuel officiel de la réforme moderne, nous ont semblé plus éloignées « sur le fond » de cette réforme que les pratiques données à voir par P2, que nous avions pourtant référées à la période d'enseignement antérieure.

La comparaison entre les pratiques de P1 et de P3, cette fois toutes deux calquées sur l'organisation de l'étude apprêtée dans le manuel officiel actuel, pose différemment cette question : elle permet notamment de déceler, dans les pratiques de ces deux enseignantes, des points communs qui nous ont semblé répondre à des zones d'implicites, voire à des « vides institutionnels » au sein des organisations mathématiques et didactiques actuelles du savoir à enseigner.

Dès lors, au fil de ces comparaisons de pratiques enseignantes, se pose la question de l'interprétation du projet épistémologique et didactique qui sous-tend l'avènement d'une réforme par les enseignants, à savoir, Comment les enseignants éventuellement conditionnés par une culture mathématique et didactique préexistante se représentent-ils les paris épistémologiques et didactiques soutenus par les nouvelles réformes ? Comment donc peuvent-ils négocier et construire de nouvelles références de pratiques ?

Au final, si notre thèse a permis d'éclairer certains phénomènes d'évolution des pratiques enseignantes dans un contexte de réforme, elle nous semble aujourd'hui aboutir à un nouveau questionnement lié aux conditions de diffusion d'une réforme, ou d'un « nouveau » projet global d'enseignement (d'un domaine d'étude, voire d'une discipline).

Cette nouvelle problématique peut d'ailleurs renvoyer à des questions attenantes à la formation des pratiques si l'on considère la formation initiale et continue comme un instrument permettant une adaptation, voire une « adaptabilité », des pratiques - c'est-à-dire, plus généralement, une capacité des pratiques enseignantes à s'adapter au fil de différentes réformes. On peut donc se demander quelle approche en formation favoriserait une telle adaptabilité, sachant que les professeurs réclament principalement de savoir « comment appliquer une réforme ». Ainsi la question qui se pose, au-delà des prescriptions institutionnelles est la suivante : comment les enseignants se saisissent-ils des ressources officielles pour opérer des changements dans leurs pratiques et quelle garantie a-t-on de la longévité d'une évolution des pratiques ?

A titre d'exemple, il serait intéressant de monter une ingénierie de formation continue dans un contexte de réforme du curriculum visant explicitement un accompagnement de cette réforme (ou d'une partie de cette réforme), et d'en analyser les effets sur les pratiques effectives de certains des formés. Au cours des séances de formation,

l'analyse par les enseignants des objets qui témoignent de leurs pratiques *adaptatives* permettrait une prise de conscience, par chacun d'eux, de la forme des pratiques qu'il met en œuvre dans la classe, des marges de manœuvre possibles, du rôle qu'il y joue, de celui accordé aux élèves. Chacun peut alors identifier ce qu'il lui est possible de réguler dans sa propre pratique et repenser ses expériences. Il nous semble ainsi possible d'accompagner une réforme par une instrumentation produite pour l'actualiser, comme par exemple, la mise en œuvre de programmes d'études, matériel didactique, documents d'accompagnements, et une multiplication des manuels scolaires officiels qui permettent d'expliciter des choix théoriques sur lesquels repose une réforme.
Ainsi, l'analyse des pratiques *adaptatives* peut engager chacun dans un processus d'autocontrôle explicite. L'une de nos hypothèses, à l'aune des analyses conduites, est que ce processus d'adaptation des pratiques est déterminé en partie par la possibilité pour les enseignants de se situer dans une « ***zone proximale de la réforme*** », par l'imbrication de pratiques anciennes et nouvelles dans la recherche d'un équilibre dynamique de l'ancien et du nouveau.

On pourrait alors réinterroger des contenus, voire des partis pris de formation initiale ou continue à la lueur de cette question : en quoi des pratiques de formations d'enseignants sont-elles indexées à une période d'enseignement donnée? Autrement dit, Dans qu'elle mesure forme-t-on les enseignants d'aujourd'hui ou de demain ? Et Quelle garantie de la longévité d'une innovation des pratiques ?

# Références bibliographiques

# Références bibliographiques


Artaud M ; Chevallard Y. (2001). Le processus de régulation dans la constitution de routines professorales. Actes de la 11éme école de didactique des mathématiques corps.PP241-247.

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 10/23, pp241-286, éd. La pensée sauvage.

Assude T. (1996). De l'écologie te de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 12, pp7-32, Editions la pensée sauvage.

Assude, T. *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum.* Thèse. IREM d'Aix-Marseille.

Assude T ; Gelis J.M. (2002). .La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri- géomètre à l'école primaire. *Educational studies in Mathematics*, 50.3, pp259-287.

Assude T. (2004). Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. ARDM et IREM e Paris7. pp 317-334.

Assude T ; Margolinas, C. (2005), Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques. Manuel scolaires, regards croisés.

Bednarz N; Kieran, C; Lee, L. (1996). Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teatching. Kluwer Academic Publishers.

Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire Tunisien : Transition collège/Lycée.* Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2007). Etude des rapports institutionnels aux équations via la mise en équations dans la transition collège lycée. *Actes du colloque international critical analysis of school science textbooks analyse critique des manuels scolaires de science* (Tunisie), 7 - 10 Février 2007.

Ben Nejma, S. (2007). La cohabitation de deux langues dans la résolution de problèmes du premier degré. *Actes de la 14ème école d'été en didactique des mathématiques.*

BOSCH M ; Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 19/1, 77-123, La Pensée Sauvage, Grenoble

Bronner A ; Noirfalise, A. (2001). Structures, fonctionnement écologie des organisations didactiques à propos de l'algèbre en quatrième. Actes de la 11éme école de didactique des mathématiques corps.pp85-95.

BROUSSEAU G. (1987). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7/2, 33 – 116, La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 /3, 309-336, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU G ; CENTENO ,J. (1991) .Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 11/2.3, 167 – 210, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques in NOIRFALISE et PERRIN-GLORIAN , M . *Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand, 3-46.

Capponi B, Sutherland R.(1999). Interaction des cadres algébriques et graphiques dans la résolution de problèmes. Petit x n° 50. pp41-55.

Castela C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 15/1, pp 7-47. Edition. La pensée sauvage, Grenoble.

CENTENO J. (1995), *La mémoire didactique de l'enseignant*. Bordeaux : LADIST

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 1ère partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-95

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1989) .Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x* n° 19, 43-72, IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège .3ème partie : voies d'attaques et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 12 n°1, 73-111, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1997). Familière et problématique la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 17/3, pp17-54, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique in Noirfalise (éd.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle*, 91-120

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 19(2) 221-266. La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 1 : Structures et Fonction. *Actes de la 11éme école d'été de didactique des mathématiques.* pp1-19. La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 3 : Ecologie et Régulation. *Actes de la 11éme école d'été de didactique des mathématiques.* pp1-24. La pensée sauvage, Grenoble.

Comin. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Bordeaux : LADIST.

Comin E. (2005). Variables et fonctions du collège au lycée. « Petit x » 67, pp33-61.

COMITI C., GRENIER D. ET MARGOLINAS C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomènes didactiques in ARSAC et al. (coord.) *Différents types de savoirs et leur articulation*, 92-113, La Pensée sauvage, Grenoble.

Comiti C, Grenier D.(1997). Régulations didactiques et changements de contrats. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 17/3, pp 81-102, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Coulange L, Bessot A. (1998). Structuration du milieu et modèle local à priori. Actes de l'UE de la Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Pp39-47.

Coulange J. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième.* Thèse de Doctorat. Grenoble: université Joseph Fourier

Coulange J. (2001). Evolutions du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20$^{ème}$ siècle. Contraintes et espaces de liberté pour le professeur. *Petit x.* 57, 61-78.

Coppe S (2001) Etude de routines et régulations dans la pratique professionnelle d'un professeur des écoles. Actes de la 11éme école de didactique des mathématiques corps. pp 209-219.

DORIER J.L. et coll. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches *en didactique des mathématiques*, Vol 7/2, 5-32 éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir : une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde. *Repères* n° 15, 37-60. IREM Paris 7.

Drouhard, JP.(1996). Algèbre, calcul symbolique et didactique, in Noirfalise R et Perrin Glorian M.J. *Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont Ferrand, 325-344.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 16/3pp. 349-382. Edition. La pensée sauvage, Grenoble.

Duval, R. (1998).Graphiques et équations : L'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de sciences cognitives, p.235-253.IREM de Strasbourg,

Duval, R (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre*. SFIDA XIII-Nice, 67-93.

Floris-R.(1993). Réflexions didactiques autour d'une situation d'enseignement de l'équation de droite. Petit x n°32, pp47-66.

Gascon, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x*, 37, 43-63.

*Germi P. (1997). Statut des lettres et notion de variable.* Petit x, *n° 45 pp59-79.*

Gisèle, C et Yves, M. (1998). Equations du premier degré et modélisation algébrique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle* : Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques.

GRENIER D. (1998), Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques. In *Actes du Colloque de La Fouly II* (pp. 123-146). Genève : Interactions didactiques

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 17/2, 167-210, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

HACHE C., ROBERT A. (1997), Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de Seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17(3) 103-150.

HACHE C. (1999), *L'enseignant de mathématiques au quotidien. Études de pratiques en classe de secondes*. Paris: Université Paris VII.
Harel G.(1987). Variations in linear Algebra content presentation. *For the learning of Mathematics*, 7, 3 pp 29-32. FLM publishing Association, Canada.

Hersant, M (2008). Une pratique de débat et sa genèse. Analyser et comprendre la pratique enseignante. Presses universitaires de Rennes ; pp135-151.

Kieran, C (1985). Use of substitution procedure in learning algebraic equation-solving, in SHELON, M; DAMARIN, S.(ed) , *proceedings of the 7th anual meeting of* PME-NA, Ohio state University, 145-152.

Kieran, C (1988).Two different approaches among algebra learns, in COXFORD, A.F (ed), the ideas of algebra, k-12 Yearbook, NCTM, Reston, pp91-96.

Lacasta E. (2000). Analyse en terme de situation des usages du graphique cartésien de fonction. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques p167-183, éd Assude T, Grugeon B.

Margolinas C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître, les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 12/1, pp 113-158, éd. La pensée sauvage,
Grenoble.

MARGOLINAS C. (1997), *Une étude de la situation du professeur et de son influence sur la situation didactique : détermination des choix du professeur dans la dévolution d'une situation.* Paris : Séminaire national de didactique des mathématiques.

MARGOLINAS C. (1999) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse des situations d'enseignement, in NOIRFALISE (éd.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle*, 3-16, IREM de Clermont-Ferrand.

Markovits Z. (1986). Function today and yesterday. *For the learning of Mathematics*, 6,2 pp 24-31. FLM publishing Association, Canada.

Masselot, P; Robert, A (2007). Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. Recherche et Formation. N° 56.pp 15-31.

Matheron Y. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue française de pédagogie*, n°141, pp57-66.

MERCIER A. (1986), *The "didactical contract", permanent clauses, local and global breaches* (poster). Budapest : ICME VI.

MERCIER A., BESSOT A. (1991) La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel in Gras R. (éd.) *Actes de la VIème Ecole d'été de didactique des mathématiques,* 169-173.

Maury, Caillot et Al . (2003). Rhétorique du changement du métier d'enseignant et stratégies de transformation de l'institution scolaire ; Education et Sociétés n°6 pp 108-121.

Pariés M. (2004). Comparaison de pratiques enseignantes de mathématiques. Relation entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 24/2, pp251-284, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Pavlopoulou K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation. *Annales de didactique des sciences cognitives*.5 pp67-93. IREM de Strasbourg

PERRIN-GLORIAN (1998) A study of teachers' practices. Organisation of contents and students' work. *Actes du groupe 3, colloque CERME*, Osnabrück, publication en ligne.

PERRIN-GLORIAN M. (1999) .in NOIRFALISE (éd.) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle*, 17-38, IREM de Clermont-Ferrand.

Perrin-Glorian M. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques, l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/3, pp 279-322, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Perrin M, Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique , outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/2, pp217-276, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Ravel L. (2003). *Les programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne*. Thèse de Doctorat. Grenoble: université Joseph Fourier

Robert A., ROBINET J. (1996) Prise en compte du "méta"en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 16/2, 145-175, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* n° 18/2, 139 –189, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A, Rogalsky J. (2002). Le système complexe stable et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et technologiques.* pp505-528.

Robert A; Butlen, D ; Masselot , P; Vandebrouk (2002). Deux exemples de routines: La gestion du tableau en seconde; la gestion par un professeure d'école en première nomination d'une séance en CP. Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques-Corps. pp.221-230.

Rogalsky J .(2003). Y a t-il un pilote dans la classe ? Une analyse d l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 3, pp 343-388, éd. La pensée sauvage, Grenoble.

Sensevy G. (1999) .L'action et le discours sur l'action du professeur. Sémantique « naturelle » et langage « théorique ». In *Actualités de la Recherche en Éducation* (à paraître). Bordeaux : AECSE.

Sensevy G. (2001). Théories de l'action et éducation. Théories de l'action et action du professeur, pp203-224, Bruxelles, De Boeck.
SENSEVY G ; Mercier, A et al (2007). Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves. Presses universitaires de Rennes.

Shmidt S, Bednarz N. (1997). Raisonnement arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrés par le futurs enseignants. *Educational studies in mathematics* 32 pp 127-155 .Kluwer Academic Publishers

Smida H; Rouen O, Ould Sidaty; M, Abdelli, M. (2007). Les dispositifs de formation des enseignants en mathématiques des pays du Maghreb FACE aux défis de l'école .pp 209-229. Canadian Journal of science, Mathematics and Technology Education.

Susan E, Lyndon M. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation: one approach to the teaching of linear equation. *Educational studies in mathematics* 34 pp 159-181 .Kluwer Academic Publishers.

Sutherland R. (1991). some unanswered research Questions on the teaching and learning of algebra. *For the learning of Mathematics*, 11, 3 pp 29-33. FLM publishing Association, Canada

Tisseron C (2002). Routines et régulations dans les pratiques du professeure: Confrontation de différentes approches. Quel modèle pour l'enseignant ? Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques-Corps. pp.263-278.

Vergnaud G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, pp. 189-99.

Vergnaud G, Cortes A, Favre-Artigue P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in Actes du colloque de Sèvres : *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-288. La pensée sauvage.

Vlassis J, Demonty I.(2002). L'algèbre par des situations- problèmes au début du secondaire. Edition de Boeck. Bruxelles.

Waldegg G. (1997). Histoire, Epistémologie et Méthodologie dans la recherche en didactique .*For the learninig of Mathematics*, 17,1 pp 43-46. FLM publishing Association, Canada.

## Supports officiels

Programmes officiels de mathématiques (1959).

Programmes officiels de l'enseignement secondaire (1968).Mathématiques, Fascicule XII.

Programmes officiels de l'enseignement secondaire (1970). Mathématiques Fascicule N° 12.
Programmes officiels de l'enseignement secondaire (1982). Mathématiques. Centre national pédagogique.

Programme de mathématiques : 1ère année de l'enseignement secondaire (1998), , centre national pédagogique .

Programmes officiels du second cycle de l'enseignement de base (23 juin, 1997). République Tunisienne, Ministère de l'Education, Direction des programmes. Annexe IV.
Ministère de l'éducation, Direction des programmes, Programmes officiels de l'enseignement secondaire, Annexes XI, Mathématiques, Tunis : Centre National Pédagogique, 1998.

MCHAREK Rachid, et al. *Mathématiques pour la première année de l'enseignement Secondaire*. Tunis : Centre. National. Pédagogique, 1999, 272 p.

Ministère de l'éducation et de la formation, Direction générale des programmes et de la Formation continue, Programmes de mathématiques 1ère & 2ème année secondaire. Disponible sur
http://www.edunet.tn/ressources/reforme/nouv_prog/programmes/sciences/mathematique/math_1_2anne.pdf > (le 25 juillet 2006)

Programmes officiels du second cycle de l'enseignement de base (septembre 2004). République Tunisienne, Ministère de l'Education, Direction des programmes.

Manuel Tunisien pour les élèves de la 4ème année de l'enseignement secondaire .Math sciences et Math techniques .République Tunisienne. Ministère de l'Education. Centre National Pédagogique (1978).

Manuel Tunisien pour les élèves de la 4ème année de l'enseignement secondaire .Math sciences et Math techniques .République Tunisienne. Ministère de l'Education. Centre National Pédagogique (1984).

Manuel Tunisien (code : 222 401).Mathématiques pour les élèves de la 4ème année de l'enseignement secondaire. République Tunisienne. Ministère de l'Education. Centre National Pédagogique

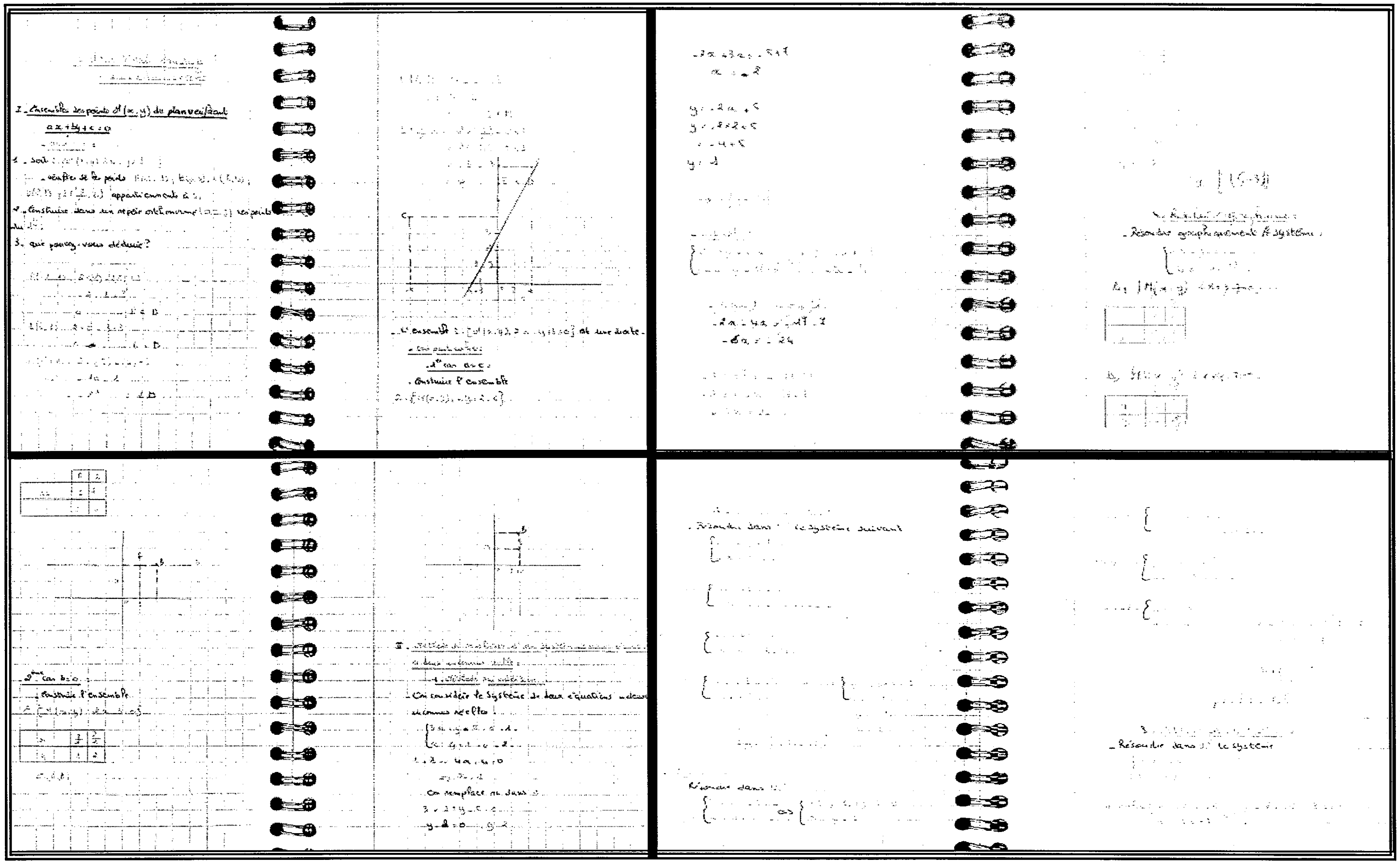
Manuel Tunisien, (code : 222101). Mathématiques pour les élèves de la 1ère année de l'enseignement secondaire. République Tunisienne. Ministère de l'Education. Centre National Pédagogique.

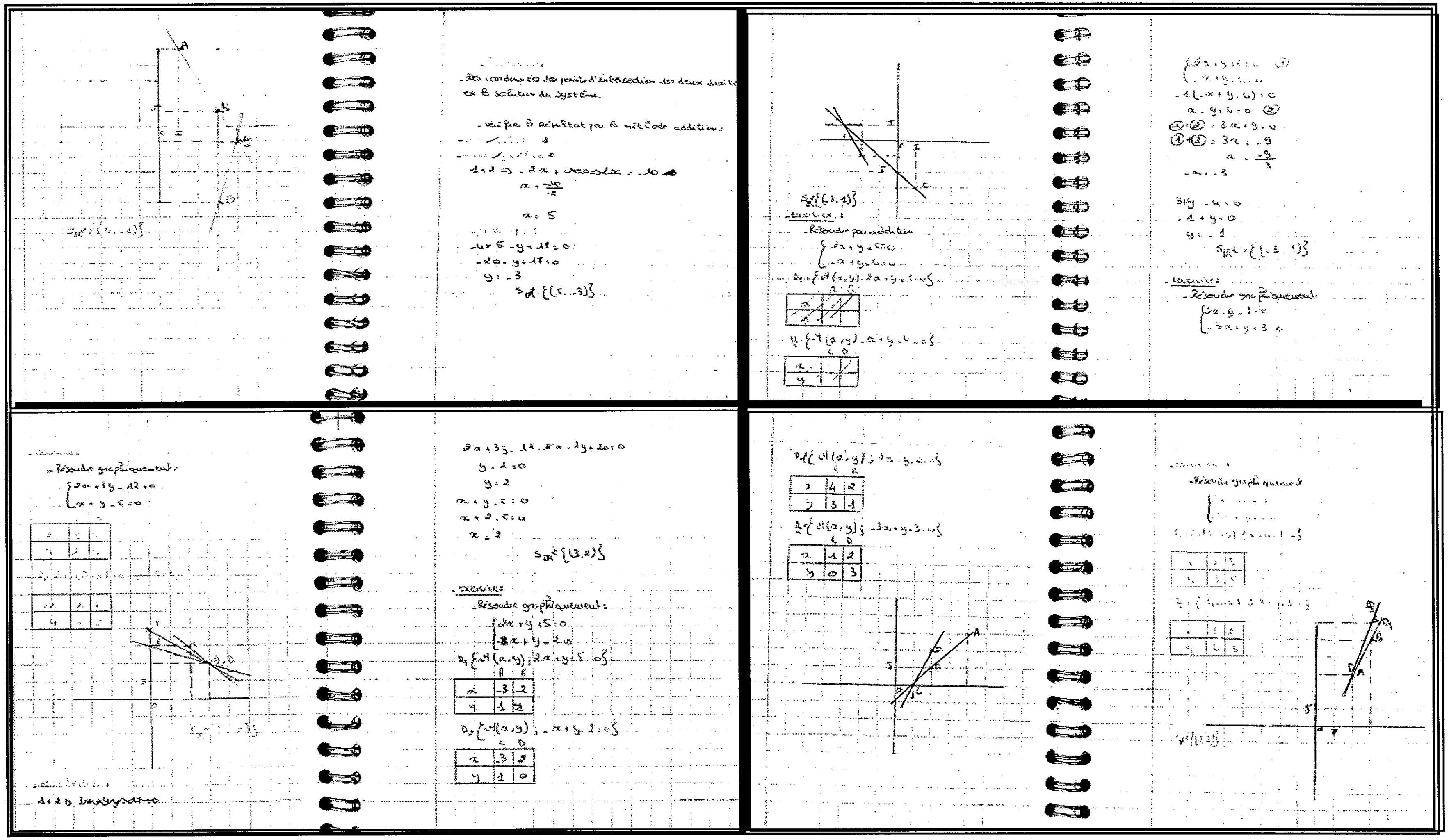
Manuel Tunisien, (code : 222104). Mathématiques pour les élèves de la 1ère année de l'enseignement secondaire. République Tunisienne. Ministère de l'Education. Centre National Pédagogique.

# ANNEXES

## Echantillons des cahiers d'élèves :

**Extrait du cahier de Meriam**





## Extrait du cahier de Imed

$x + y = 6$

Les couples $(x, y)$ qui vérifient cette équation

$(1,5)$ $(5,1)$ $(3,3)$ $(2,4)$ $(4,2)$

il y a cinq couples

$x + y = 10$

Les couples $(x, y)$ qui vérifient cette équation :

$(5,5)$ $(6,4)$ $(4,6)$.

il y a trois couples.

on désigne par $x$ le nombre de cassettes et $y$ le nombre de C.P.

$2{,}5x + 15y = 100$

si $x = 4$ alors $2{,}5 \times 4 + 15y = 100$

$15y = 100 - 10 = 90$

$y = \frac{90}{15} = 6$

$x = 2y$

$2{,}5 \times 2y + 15y = 100$

$20y = 100$

$y = \frac{100}{20}$

$y = 5$

donc $x = 2 \times 5$

$x = 10$

si $y = 1{,}5x$

$2{,}5x + 1{,}5 \times 15x = 100$

$2{,}5x + 22{,}5x$

$25x = 100$

$x = \frac{100}{25} = 4$

donc $y = 4 \times 1{,}5$

$y = 6$

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R}, \ldots\}$

l'équation $ax + by + c = 0$, où $a$ et $b$ sont deux réels non tous les deux nuls et $x$ et $y$ sont deux inconnues est appelée équation du premier degré à deux inconnues.

Résoudre une équation c'est trouver tous les couples $(x, y)$ pour lesquels l'égalité est vraie.

Chaque couple est appelé solution de l'équation

$ax + by + c = 0$

$a$ et $b$ non tous les deux nuls

$a \neq 0$ : $ax + 0y + c = 0$

$b \neq 0$ : $0x + by + c = 0$

$m + n = \frac{m - n}{3}$

$3m + 3n = m - n$

$2m + 4n = 0$

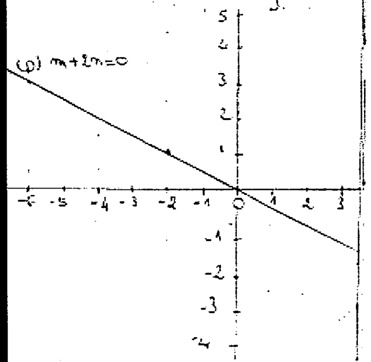
$m + 2n = 0$

$m = -2n$

$(m, n) \in \{(-4, 2), (-6, 3)\}$

| $n$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $m$ | $-2$ | $-6$ | $-10$ |

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(m, n)$ tel que $m = -2n$ et $n \in \mathbb{R}\}$.




Retenons

La représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'équation $m + 2n = 0$ dans un repère du plan $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$

Démontrer que les 3 points sont alignés
$A(1, -2)$
$B(3, -6)$
$C(5, -10)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$

$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{2} = 2$

$\frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} = \frac{-8}{-4} = 2$

$\vec{AC} = 2\vec{AB}$

Retenons.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien du plan

La représentation graphique des solutions de l'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite.

Cas particulier

1/ si $a = 0$ et $b \neq 0$

$0x + by + c = 0$ donc $y = \frac{-c}{b}$

donc $S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, -\frac{c}{b})$ tel que $x \in \mathbb{R}\}$

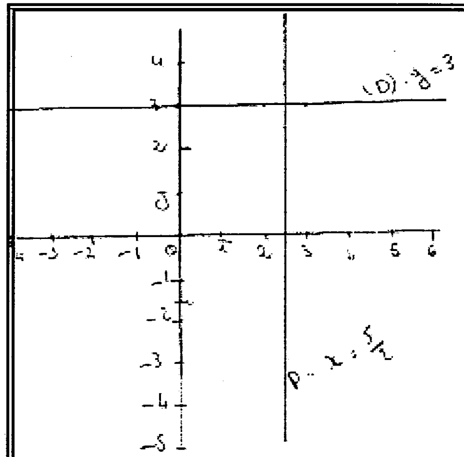
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

Exemples : $2y - 6 = 0$

$0x + 2y - 6 = 0$

donc $y = 3$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, 3)$ avec $x \in \mathbb{R}\}$




$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x,3)$ avec $x \in \mathbb{R}\}$
ex. $(2,3)$ $(4,3)$ $(0,3)$ $(5,3)$

4) 2ème cas

si $a \neq 0$ et $b = 0$

$ax + 0y + c = 0$.

$x = -\frac{c}{a}$.

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-\frac{c}{a}, y)$ avec $y \in \mathbb{R}\}$

exemples. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$-2x + 5 = 0$

$-2x + 0y + 5 = 0$

$x = \frac{5}{2}$

$S_{\mathbb{R}^2} \{(\frac{5}{2}, y$ avec $y \in \mathbb{R}\}$

Exemple :

(E), $3x + 5y = 6$

si $x = 2$

$6 + 5y = 6$

$5y = 0$

$y = 0$

$(2,0)$ est solution de (E)

$5y = 6 - 3x$

$y = \frac{6-3x}{5}$

$S = \{(x,y)$ tel que $y = \frac{6-3x}{5}$ $x \in \mathbb{R}\}$

$S = \{(x, \frac{6-3x}{5})$ $x \in \mathbb{R}$
$(0, \frac{6}{5})$ ; $(1; \frac{3}{5})\}$

$M(x,y)$

II Système de deux équations à deux inconnues :

1 activité 4 p 229.

$3N = R - 3$

et

$4N = R + 4$

on cherche N et R vérifiant à la fois les deux équations

$N = \frac{R-3}{3}$

$4\frac{R-3}{3} = R + 4$

$4\frac{R-3}{3} - R = 4$

$\frac{4(R-3)}{3} - \frac{3R}{3} = 4$.

$4R - 12 - 3R = 12$

$\boxed{R = 24}$

$3N = 24 - 3$

$3N = 21$

$N = \frac{21}{3} = 7$

$(N,R) = (7,24)$ est solution de ces deux équations à la fois

$3N = R - 3$

et

$4N = R + 4$

se notent

$$\begin{cases} 3N = R - 3 \\ 4N = R + 4 \end{cases}$$

c'est un système de deux équations à deux inconnues N et R.

Définition

Un système de deux équations à deux inconnues est la donnée de deux équations :

$ax + by = c$

$a'x + b'y = c'$

où x et y sont les inconnues

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x,y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois, chaque couple est appelé solution du système

Activités p229 :

$\begin{cases} m + n = 96 \\ 2(m+78) = n+78 \end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases} m = 96 - n \\ 2(96 - n + 78) = n + 78 \end{cases}$

$192 - 2n + 156 = n + 78$

$-3n = -270$

$n = 90$

$m = 6$

$(m,n) = (6,90)$ est solution de ce système

Cette méthode de résolution est appelée : Méthode par substitution

Activité 6 : p229 :

1- $x$ désigne le prix d'un cahier

$y$ désigne le nombre d'un stylo

2) $\times \begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$

$-2 \begin{cases} -10x - 4y = -6600 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$ (+)

$-7x = -4200$

donc $\boxed{x = 600}$

$5 \times 600 + 2y = 3300$

$3000 + 2y = 3300$

$y = \frac{3300 - 3000}{2}$ $(x,y) = (600,150)$

$y = 150$

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ équivaut à — méthode par substitution

$x = 5 + y$

$3(5 + y) + 2y = 6$

éq à $15 + 3y + 2y = 6$

$5y = 6 - 15$

$y = \frac{-9}{5}$

$x = 5 + -\frac{9}{5}$

$= \frac{25 - 9}{5} = \frac{16}{5}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)\right\}$

méthode par élimination :

$x - y = 5$

$3x + 2y = 6$

$2x - 2y = 10$

$3x + 2y = 6$

$5x = 16$

$x = \frac{16}{5}$

$y = x - 5$

$y = \frac{16}{5} - \frac{25}{5}$

$y = \frac{-9}{5}$

P.237 :

exercice 1 :

$2 \times$ $5x + 6y = 26$

$4x - 12y = 4$

$10x + 12y = 52$

$4x - 12y = 4$

$14x = 56$

$x = \frac{56}{14} = 4$

$x = 4$

$6y = 26 - 5x$

$y = \frac{26 - 5x}{6}$

$y = \frac{26 - 20}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(4,1)\}$

Cas particuliers :

$-2) \times$ $2x + 3y = 5$

$4x + 6y = 10$

$0x + 0y = 0$

$2x + 3y = 5$

$y = \frac{5 - 2x}{3}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x, \frac{5-2x}{3}\right) x \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$ $2\times$

$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -5x + y = 16 \end{cases}$

$0x + 0y = 19$

$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$

$\begin{cases} -2a + b = 12 \\ -3a - 4b = 7 \end{cases}$

$-8a + 4b = 48$

$-3a - 4b = 7$

$-11a = 55$

$a = -\frac{55}{11}$

$a = -5$

$b = 12 + 2a$

$b = 12 - 10$

$b = 2$

$(a,b) = (-5, 2)$

exo 9 : p 238 :

x : chiffre des dizaines

y : chiffre des unités

$x + y = 12$

$10x + y - 18 = 10y + x$

$\begin{cases} y = 12 - x \\ \end{cases}$

exercice :

Résoudre graphiquement les systèmes suivants

a $(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 1 & \Delta_1 \\ x - 4y = 5 & \Delta_2 . \end{cases}$

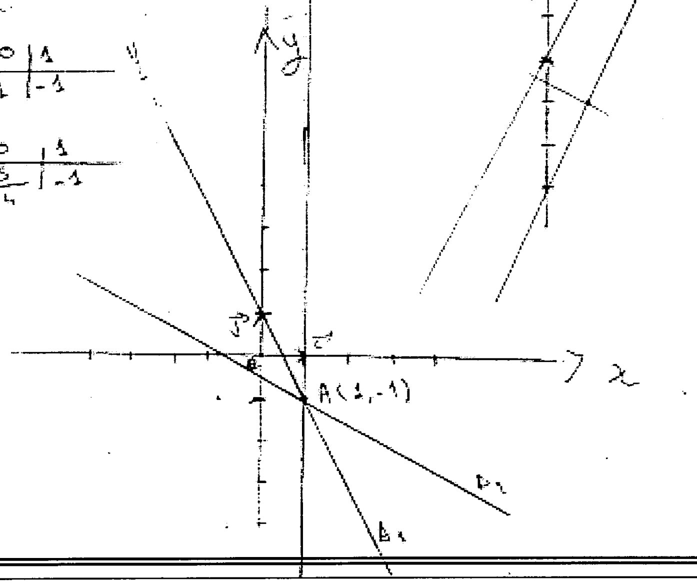
$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ y = \frac{5 - x}{-4} \end{cases}$

$\Delta_1$ :

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | 1 | -1 |

$\Delta_2$ :

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | $\frac{-5}{4}$ | -1 |

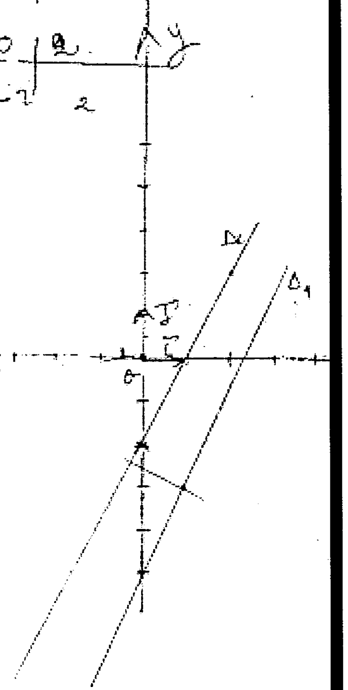



$S_2 : \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ $x - y = 2$

$\begin{cases} y = 2x - 5 & \Delta_1 \\ y = 2x - 2 & \Delta_2 \end{cases}$

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| y | -5 | -3 |

| x | 0 | 2 |
|---|---|---|
| y | -2 | 2 |




$(S_3) \begin{cases} y + 2x - 5 = 0 \\ x = 5 - (x + y) . \end{cases}$

$y = -2x + 5$

$y = 3 - 2x$

$S_{\mathbb{R}} = \{ (x, 5 - 2x) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \}$

$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$

$S_{\mathbb{R}}' = \emptyset$

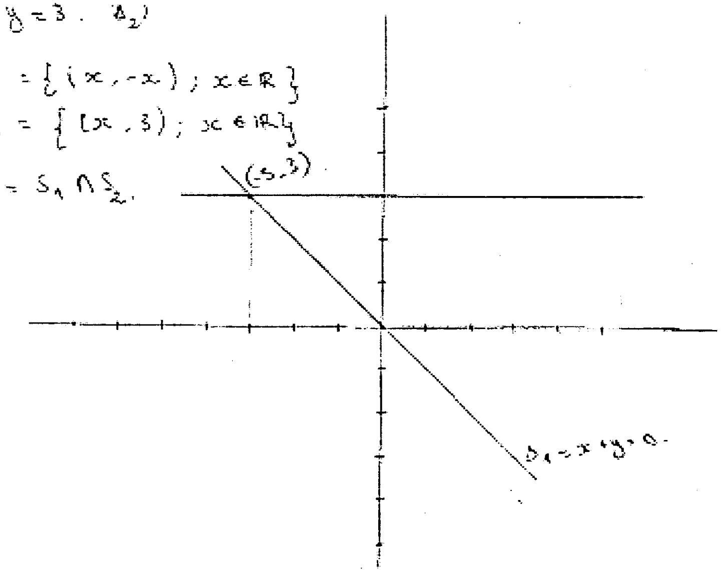
ex ... page 237

$\begin{cases} x + y = 0 & (\Delta_1) \\ y = 3 . & \Delta_2) \end{cases}$

$S_1 = \{ (x, -x) ; x \in \mathbb{R} \}$

$S_2 = \{ (x, 3) ; x \in \mathbb{R} \}$

$S = S_1 \cap S_2 .$



Exercice n° 3.

$(x-y)^2 + (3x+2y-1)^2$ c'est équivaut à :

$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases}$ et $3x+2y-1=0$.

$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$

$x=y.$

$3y+2y=1$

$5y=1$

$y=\frac{1}{5}$ donc $x=\frac{1}{5}$.

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$.

• $(3x-y)^2 - (x+2y)^2 = 0$

$(3x-y-x-2y)(3x-y+x+2y)=0$

$(2x-3y)(4x+y)=0$

$y=\frac{2x}{3}$ ou $y=-4x$.

$\mathbb{R}^2 = \left\{\left(x, \frac{2x}{3}\right)\right\} \cup \left\{(x, -4x)\right\}$

Exercice n° 5

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x+y=13 \\ 5x+3y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+3y=39 \\ 5x+3y=45 \end{cases}$

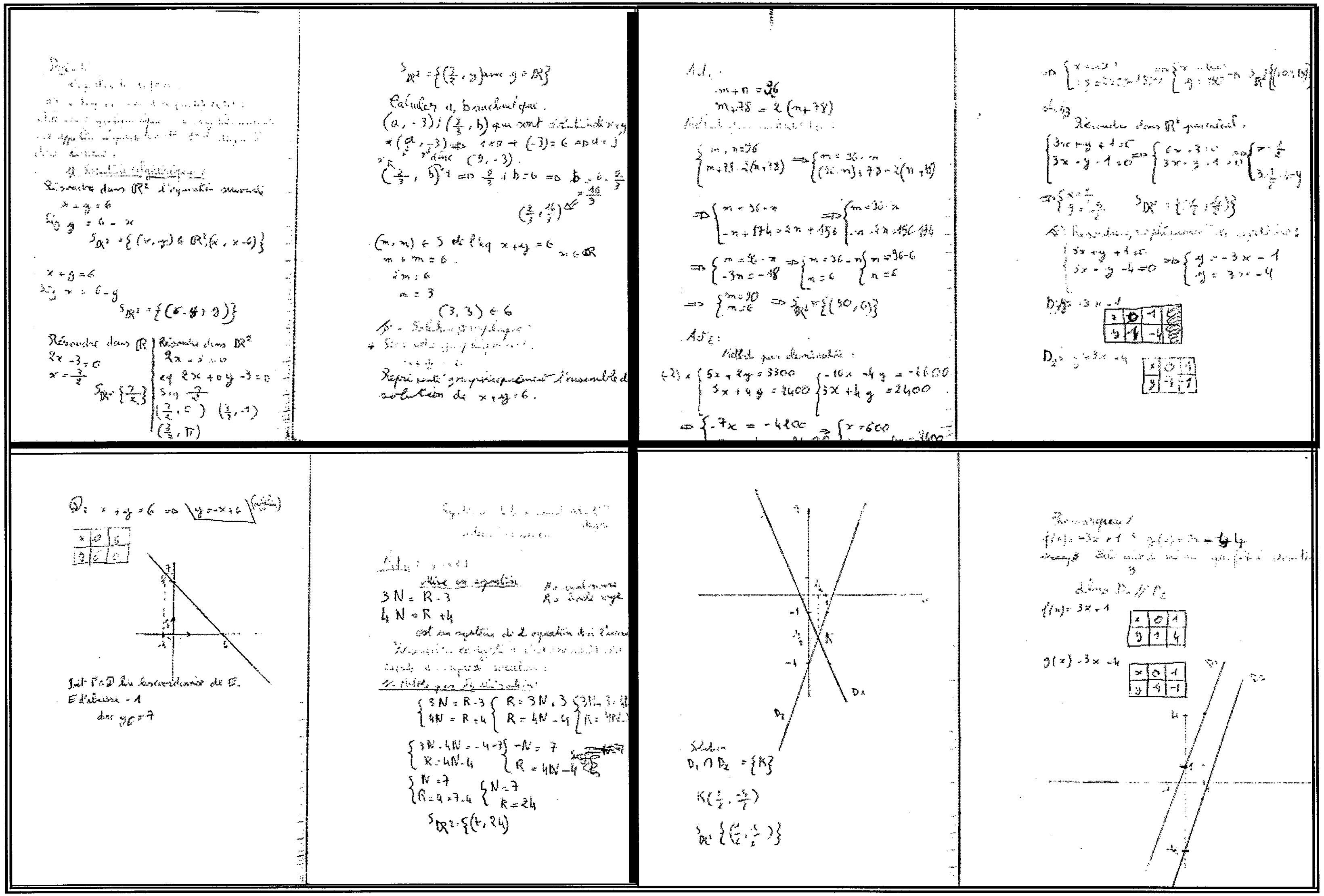
$L_2-L_1 \begin{cases} 2x=6 \\ x+y=13 \end{cases}$

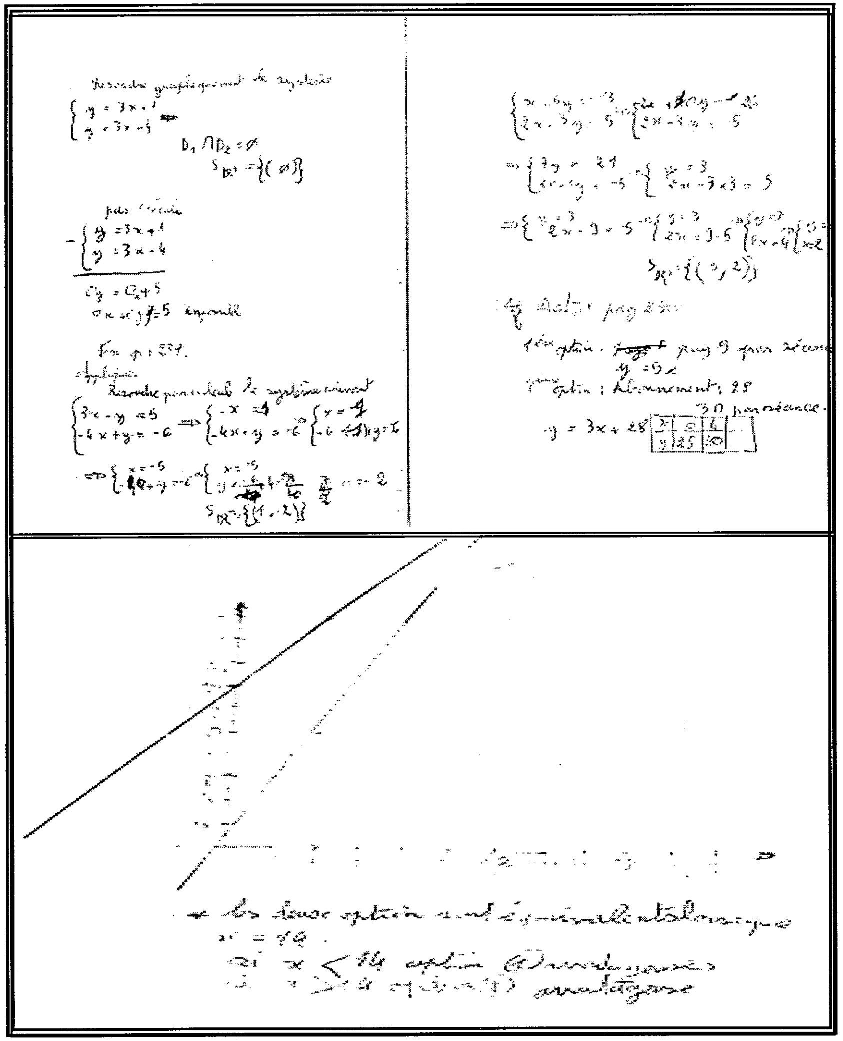
$\begin{cases} x=3 \\ 3+y=13 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=10 \end{cases}$

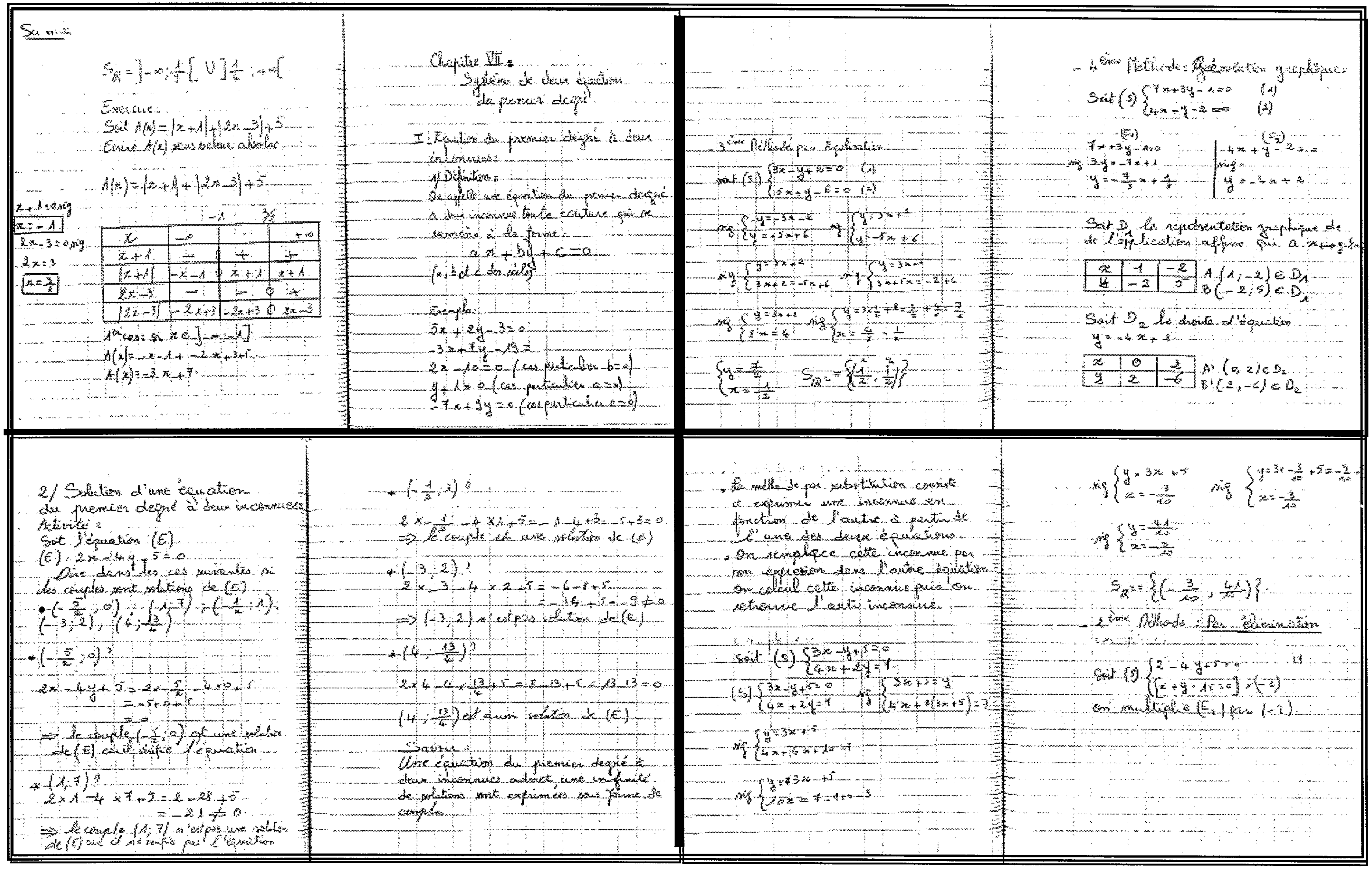
$S_{\mathbb{R}^2} = \{(3, 10)\}$

# Extrait du cahier de Fatma





## Extrait du cahier de Samia



Samia

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; -1[ \cup ]\frac{3}{2}; +\infty[$

Exercice :
Soit $A(x) = |x+1| + |2x-3| + 5$
Écrire $A(x)$ sans valeur absolue

$A(x) = |x+1| + |2x-3| + 5$

$x+1=0$ $\boxed{x=-1}$
$2x-3=0$ $2x=3$ $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $+$ | | $+$ |
| $\|x+1\|$ | $-x-1$ | $x+1$ | | $x+1$ |
| $2x-3$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\|2x-3\|$ | $-2x+3$ | $-2x+3$ | 0 | $2x-3$ |

1er cas : si $x \in ]-\infty; -1]$
$A(x) = -x-1 + -2x+3+5$
$A(x) = -3x+7$

Chapitre VII :
Système de deux équations du premier degré

I. Équation du premier degré à deux inconnues :
1) Définition :
On appelle une équation du premier degré à deux inconnues toute écriture qui se ramène à la forme :
$ax + by + c = 0$
($a$, $b$ et $c$ des réels)

Exemple :
$5x + 2y - 3 = 0$
$-3x + 7y - 19 = 0$
$2x - 10 = 0$ (cas particulier $b=0$)
$y + 1 = 0$ (cas particulier $a=0$)
$-7x + 3y = 0$ (cas particulier $c=0$)

3ème Méthode par égalisation

Soit (S) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 & (1) \\ 5x + y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -5x + 6 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 3x + 2 = -5x + 6 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 3x + 5x = -2 + 6 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 8x = 4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = 3 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2} \\ x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{7}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $S_{\mathbb{R}^2} = \{(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})\}$

4ème Méthode : Résolution graphique

Soit (S) $\begin{cases} 7x + 3y - 1 = 0 & (1) \\ 4x - y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

($E_1$) $7x + 3y - 1 = 0$ ssi $3y = -7x + 1$ ; $y = -\frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$ | ($E_2$) $-4x + y - 2 = 0$ ssi $y = -4x + 2$

Soit $D_1$ la représentation graphique de l'application affine qui à $x$...

| $x$ | 1 | $-2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | 5 |

$A(1; -2) \in D_1$
$B(-2; 5) \in D_1$

Soit $D_2$ la droite d'équation $y = -4x + 2$

| $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | $-6$ |

$A'(0; 2) \in D_2$
$B'(2; -6) \in D_2$

2/ Solution d'une équation du premier degré à deux inconnues
Activité :
Soit l'équation (E)
(E) : $2x - 4y + 5 = 0$
Dire dans les cas suivants si les couples sont solutions de (E)
• $(-\frac{5}{2}; 0)$ ; $(1; 7)$ ; $(-\frac{1}{2}; 1)$ ; $(-3; 2)$, $(4; \frac{13}{4})$

• $(-\frac{5}{2}; 0)$ ?
$2x - 4y + 5 = 2 \times -\frac{5}{2} - 4 \times 0 + 5$
$= -5 + 0 + 5$
$= 0$
⇒ le couple $(-\frac{5}{2}; 0)$ est une solution de (E) car il vérifie l'équation

• $(1; 7)$ ?
$2 \times 1 - 4 \times 7 + 5 = 2 - 28 + 5$
$= -21 \neq 0$
⇒ le couple $(1; 7)$ n'est pas une solution de (E) car il ne vérifie pas l'équation

• $(-\frac{1}{2}; 1)$ ?
$2 \times -\frac{1}{2} - 4 \times 1 + 5 = -1 - 4 + 5 = -5 + 5 = 0$
⇒ le couple est une solution de (E)

• $(-3; 2)$ ?
$2 \times -3 - 4 \times 2 + 5 = -6 - 8 + 5$
$= -14 + 5 = -9 \neq 0$
⇒ $(-3; 2)$ n'est pas solution de (E)

• $(4; \frac{13}{4})$ ?
$2 \times 4 - 4 \times \frac{13}{4} + 5 = 8 - 13 + 5 = 13 - 13 = 0$
$(4; \frac{13}{4})$ est aussi solution de (E)

Savoir :
Une équation du premier degré à deux inconnues admet une infinité de solutions sont exprimées sous forme de couples.

• La méthode par substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.
• On remplace cette inconnue par son expression dans l'autre équation, on calcule cette inconnue puis on retrouve l'autre inconnue.

Soit (S) $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$

(S) $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} 3x + 5 = y \\ 4x + 2(3x + 5) = 7 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 4x + 6x + 10 = 7 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ 10x = 7 - 10 = -3 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x = -\frac{3}{10} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y = 3 \times -\frac{3}{10} + 5 = -\frac{9}{10} + \frac{50}{10} \\ x = -\frac{3}{10} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y = \frac{41}{10} \\ x = -\frac{3}{10} \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-\frac{3}{10}; \frac{41}{10})\}$

2ème Méthode : Par élimination

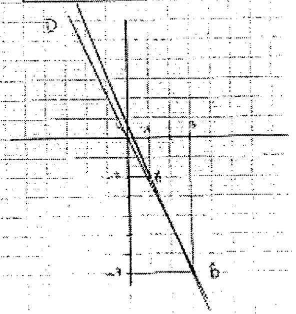
Soit (S) $\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 & (1) \\ x + y - 15 = 0 \end{cases} \times (-2)$

On multiplie ($E_2$) par $(-2)$

Soit D la représentation graphique de l'application affine $f$ qui à $x \longmapsto y = f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | 3 |
| $y$ | $-2$ | $-7$ |

$A(1; -2) \in D$.
$B(3; -7) \in D$.



Les coordonnées de tout point M de D est solution de (E)

Exercice :
$(E_1)\ 3x - 5y + 1 = 0$
$(E_2)\ 2x - 1 = 0$
$(E_3)\ y + 2 = 0$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes.
b) Représenter les solutions de ces équations

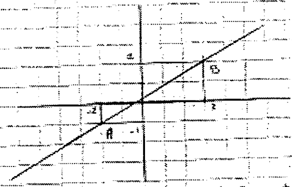
①
a) $(E_1)\ 3x - 5y + 1 = 0$
ssi $-5y = -3x - 1$
ssi $y = \frac{-3x-1}{-5} = -\frac{3}{-5}x - \frac{1}{-5}$
$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}\right) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\right\}$.

b) or $(E_1)$ est équivalente à $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$
soit $D_1$ la représentation graphique de l'application affine qui à $x \mapsto y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | 3 |
| $y$ | $-1$ | 2 |

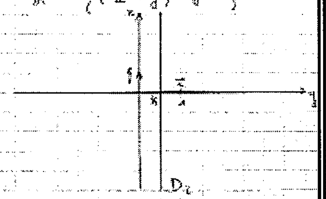
ou bien soit $D_1$ la droite d'équation : $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$
$A(-2; -1) \in D_1$, $B(3; 2) \in D_1$



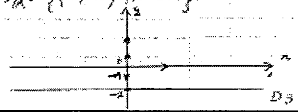
Les coordonnées de tout point de $D_1$ est solution de (E)

Cas particulier.
② $(E_2) : 2x - 1 = 0$ $(b = 0)$
ssi $x = \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{1}{2}; y\right), y \in \mathbb{R}\right\}$.



③ $(E_3)\ y + 2 = 0$
$y = -2$
$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x; -2), x \in \mathbb{R}\}$



* Résolution par le calcul

soit (E) : $ax + by + c = 0$
$by = -ax - c$
$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}\right) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\right\}$

Exemple :
(E) : $3x - 5y + 7 = 0$.
① Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E)
(E) : $3x - 5y + 7 = 0$
$-5y = -3x - 7$
$y = \frac{-3}{-5}x - \frac{7}{-5}$
$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}\right), \text{ avec } x \in \mathbb{R}\right\}$

② Citer quelques solutions de (E)

$\left(0; \frac{7}{5}\right)$; $\left(-1; \frac{4}{5}\right)$; $\left(4; \frac{19}{5}\right)$; $\left(3; \frac{-5}{5}\right)$
$\left(\sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}+7}{5}\right)$

3/ Représentation graphique des solutions d'une équation du 1er degré à deux inconnues :
Exemple
(E) $5x + 2y - 1 = 0$
1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E)
2/ Représenter les solutions de (E)

1/ (E) $5x + 2y - 1 = 0$
ssi $2y = -5x + 1$
ssi $y = \frac{-5x+1}{2} = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(x; -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\right\}$.

2/ (E) $5x + 2y - 1 = 0$
ssi $\boxed{y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}} = f(x)$

$t = ?$ $(t; 3)$ soit solution de $E_1$ ?

II/ Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.
① Définition :
On appelle système la donnée de deux équations à deux inconnues

$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 & (E_1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (E_2) \end{cases}$

$a, b, c, a', b', c'$ sont des réels
(? remplace et)

* Résolution d'un système (Par le calcul)
1ère Méthode : Par substitution

$(S) \begin{cases} 7x + 3y - 1 = 0 & (E_1) \\ 4x + y - 2 = 0 & (E_2) \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 7x + 3y - 1 = 0 \\ y = -4x + 2 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 7x + 3(-4x + 2) - 1 = 0 \\ y = -4x + 2 \end{cases}$

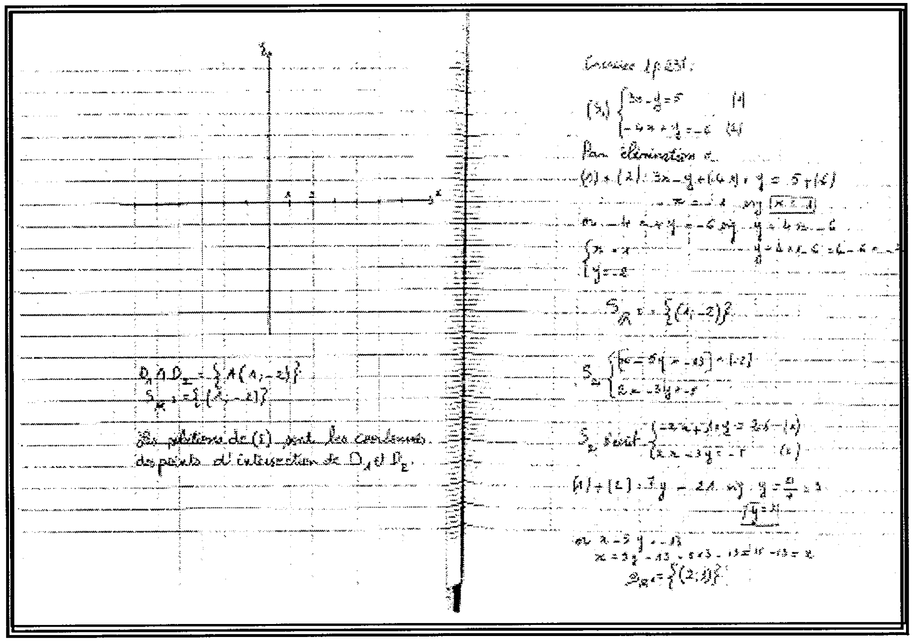
ssi $\begin{cases} 7x - 12x + 6 - 1 = 0 \\ y = -4x + 2 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} -5x + 5 = 0 \\ y = -4x + 2 \end{cases}$

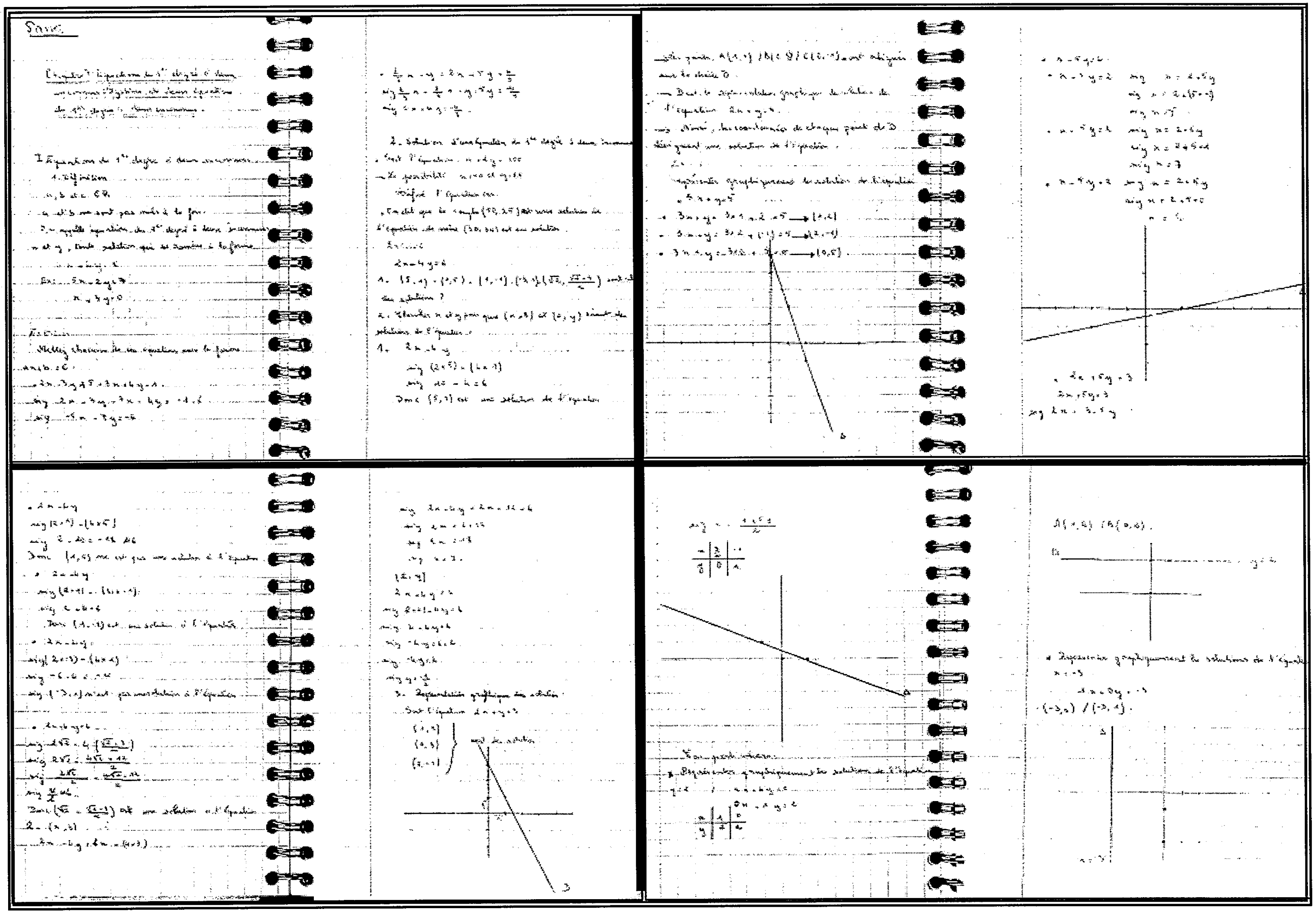
ssi $\begin{cases} -5x = -5 \\ y = -4x + 2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = \frac{-5}{-5} = 1 \\ y = -4 \times 1 + 2 = -4 + 2 = -2 \end{cases}$

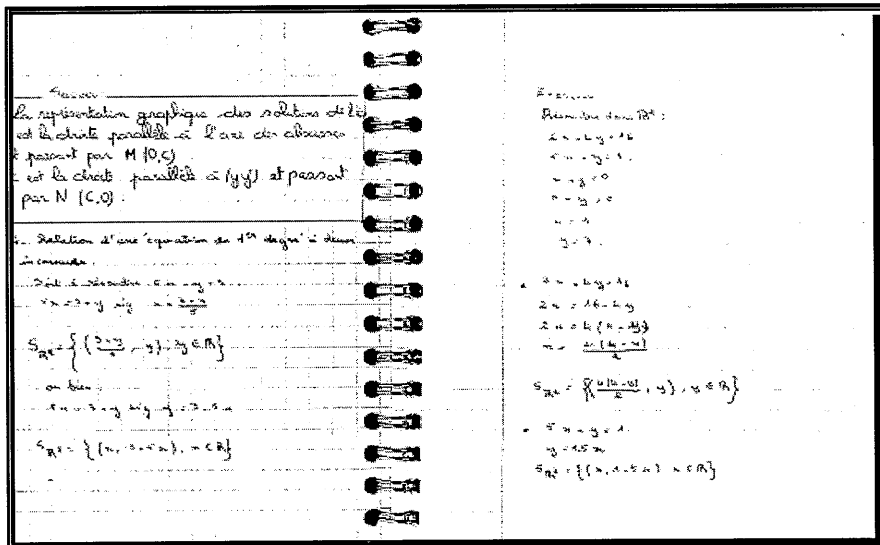
$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

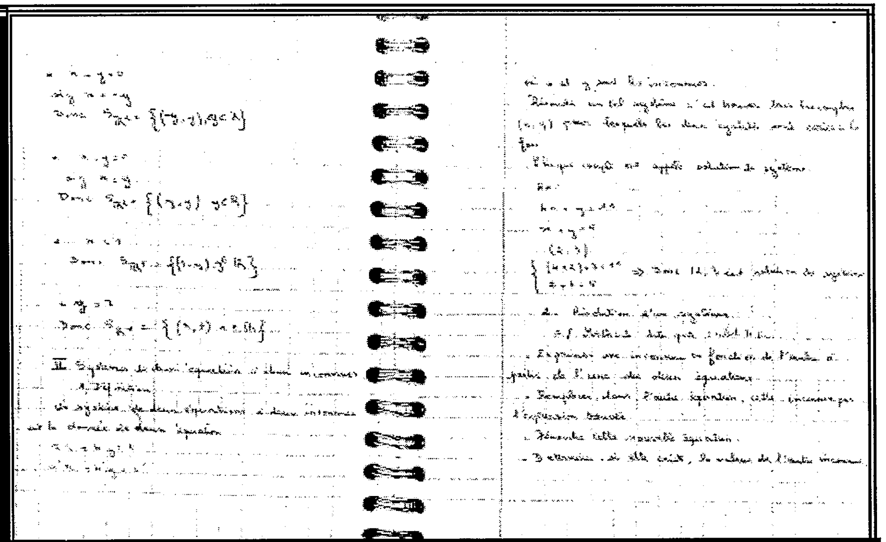
$S_{\mathbb{R}^2} = \{(1; -2)\}$.

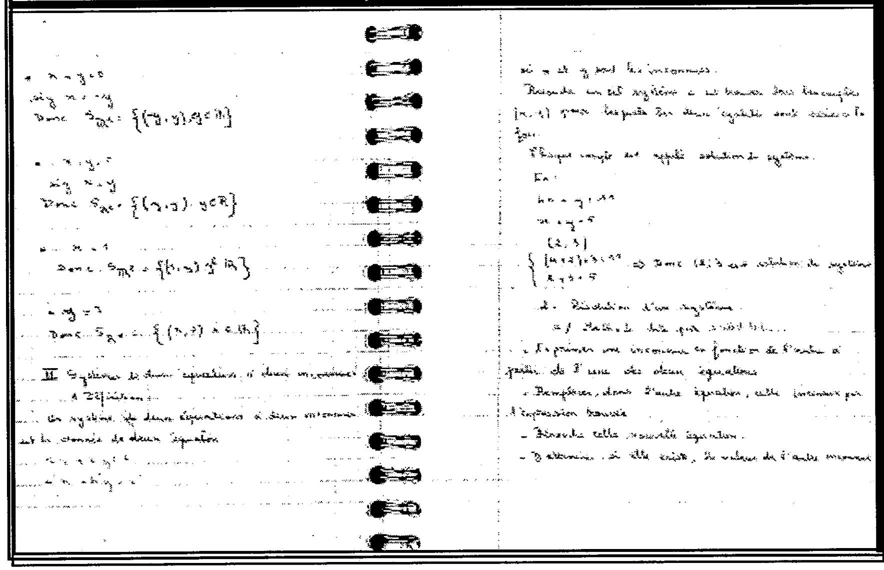


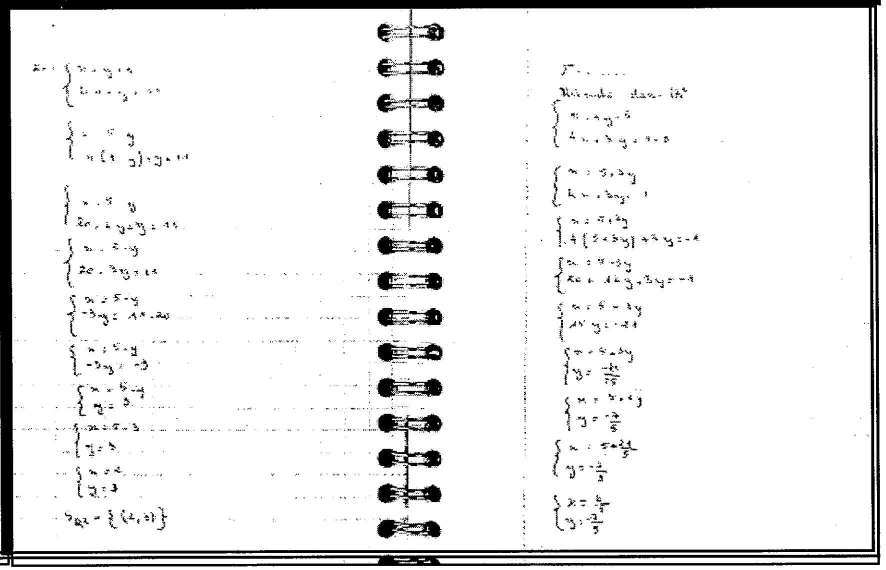
## Extrait du cahier de Sarra



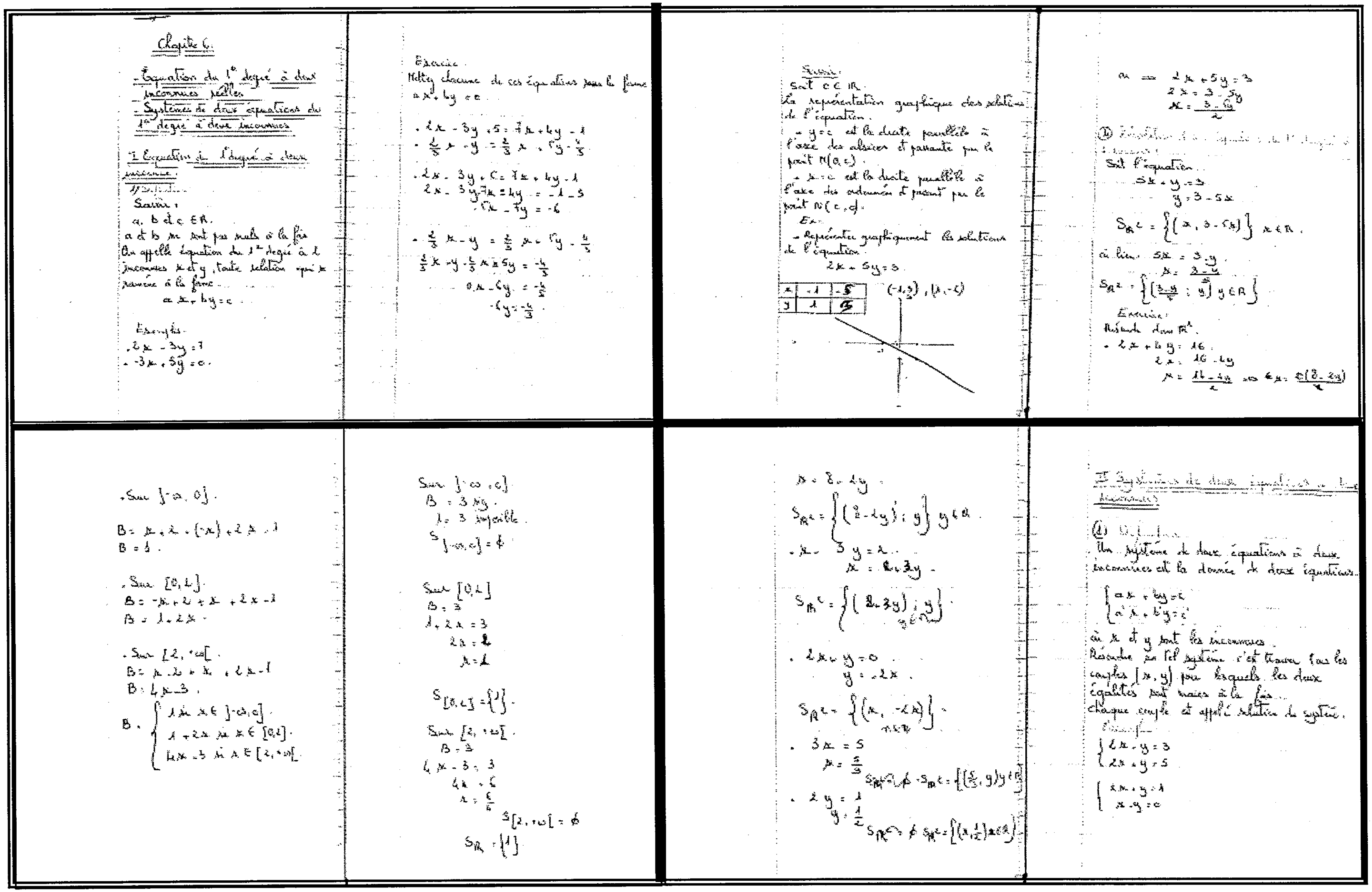

La représentation graphique des solutions de l'é
est la droite parallèle à l'axe des abscisses
et passant par M (0,c)
est la droite parallèle à (yy') et passant
par N (C,0).







## Extrait du cahier de Nizar


Chapitre 6.

- Équation du 1er degré à deux inconnues réelles
- Systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues

I Équation du 1er degré à deux inconnues

1) Définition

Savoir :

a, b et c ∈ R.

a et b ne sont pas nuls à la fois

On appelle équation du 1er degré à 2 inconnues x et y, toute relation qui se ramène à la forme

$ax + by = c$

Exemples

- $2x - 3y = 7$
- $-3x + 5y = 0$

Exercice

Mettez chacune de ces équations sous la forme $ax + by = c$

- $2x - 3y + 5 = 7x + 4y - 1$
- $\frac{2}{3}x - y = \frac{2}{3}x + 5y - \frac{4}{3}$

- $2x - 3y + 5 = 7x + 4y - 1$

$2x - 3y - 7x - 4y = -1 - 5$

$-5x - 7y = -6$

- $\frac{2}{3}x - y = \frac{2}{3}x + 5y - \frac{4}{3}$

$\frac{2}{3}x - y - \frac{2}{3}x - 5y = -\frac{4}{3}$

$0x - 6y = -\frac{4}{3}$

$-6y = -\frac{4}{3}$

Savoir :

Soit c ∈ R.

La représentation graphique des solutions de l'équation.

- $y = c$ est la droite parallèle à l'axe des abscisses et passante par le point $M(0, c)$.
- $x = c$ est la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point $N(c, 0)$.

Ex :

- Représenter graphiquement les solutions de l'équation.

$2x + 5y = 3$

| $x$ | $-1$ | $-5$ |
|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $5$ |

$(-1, 1)$, $(4, -1)$

on a $2x + 5y = 3$

$2x = 3 - 5y$

$x = \frac{3 - 5y}{2}$

Soit l'équation

$5x + y = 3$

$y = 3 - 5x$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, 3 - 5x)\}\ x \in \mathbb{R}$.

ou bien $5x = 3 - y$

$x = \frac{3 - y}{5}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(\frac{3-y}{5} ; y)\ y \in \mathbb{R}\}$

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

- $2x + 4y = 16$

$2x = 16 - 4y$

$x = \frac{16 - 4y}{2}$ ou $x = \frac{2(8 - 2y)}{2}$

$x = 8 - 2y$.

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(8 - 2y ; y)\}\ y \in \mathbb{R}$.

- $x - 3y = 2$

$x = 2 + 3y$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(2 + 3y) ; y\}\ y \in \mathbb{R}$

- $2x + y = 0$

$y = -2x$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, -2x)\}\ x \in \mathbb{R}$

- $3x = 5$

$x = \frac{5}{3}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \{(\frac{5}{3}, y)\ y \in \mathbb{R}\}$

- $2y = 1$

$y = \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \emptyset$ ; $S_{\mathbb{R}^2} = \{(x, \frac{1}{2})\ x \in \mathbb{R}\}$

II Systèmes de deux équations à deux inconnues

1) Définition

Un système de deux équations à deux inconnues est la donnée de deux équations.

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

où x et y sont les inconnues.

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples (x, y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois.

Chaque couple est appelé solution du système.

Exemples

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

. Sur $]-\infty, 0]$.

$B = x + 2 + (-x) + 2x - 1$

$B = 1$.

. Sur $[0, 2]$.

$B = -x + 2 + x + 2x - 1$

$B = 1 + 2x$.

. Sur $[2, +\infty[$.

$B = x - 2 + x + 2x - 1$

$B = 4x - 3$.

$B = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in ]-\infty, 0] \\ 1 + 2x \text{ si } x \in [0, 2] \\ 4x - 3 \text{ si } x \in [2, +\infty[ \end{cases}$

Sur $]-\infty, 0]$

$B = 3$ ssi

$1 = 3$ impossible.

$S_{]-\infty, 0]} = \emptyset$

Sur $[0, 2]$

$B = 3$

$1 + 2x = 3$

$2x = 2$

$x = 1$

$S_{[0, 2]} = \{1\}$.

Sur $[2, +\infty[$.

$B = 3$

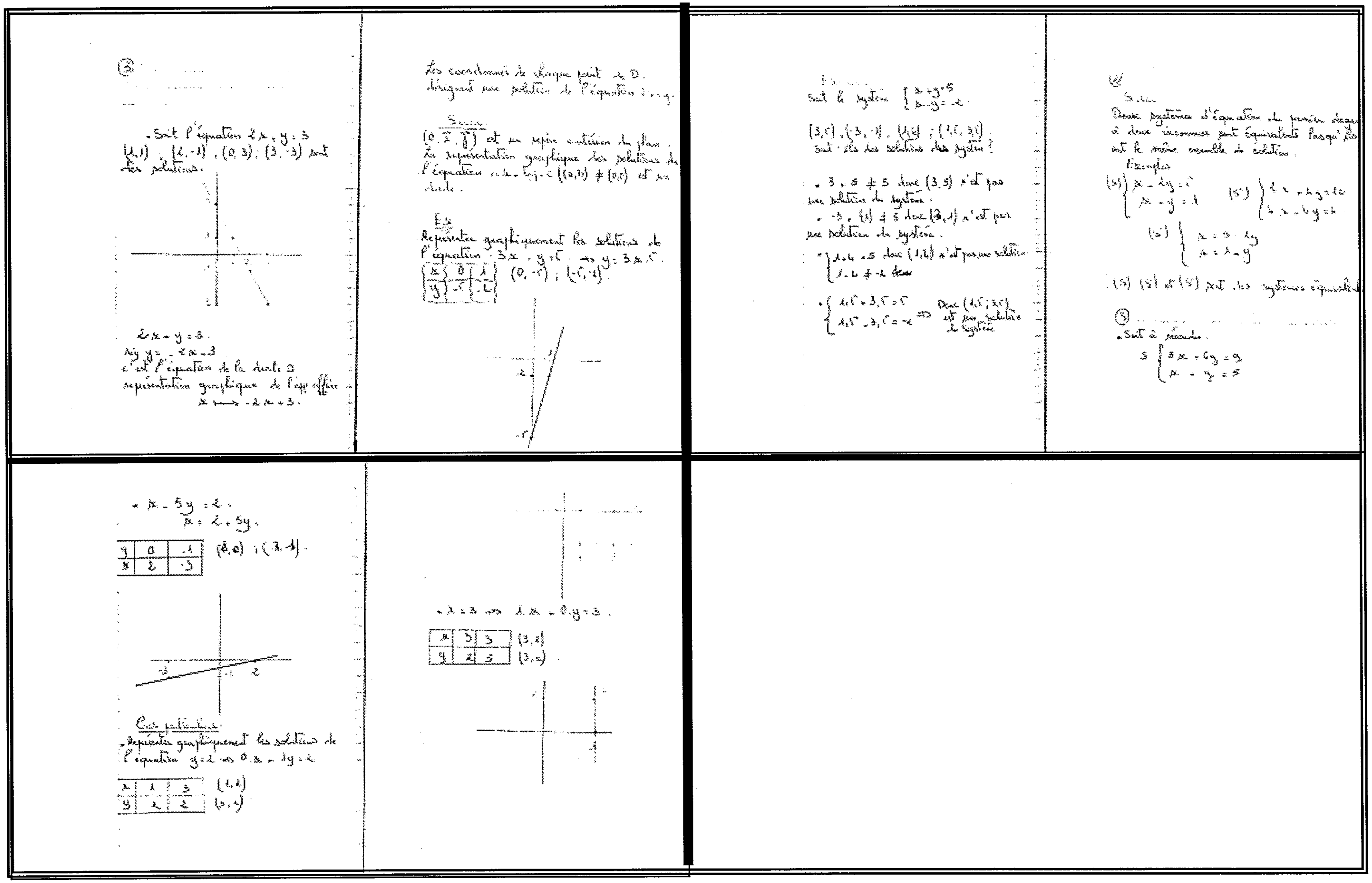
$4x - 3 = 3$

$4x = 6$

$x = \frac{6}{4}$

$S_{[2, +\infty[} = \emptyset$

$S_{\mathbb{R}} = \{1\}$



. Soit l'équation $2x + y = 3$
$(1,1)$ ; $(2,-1)$ ; $(0,3)$ ; $(3,-3)$ sont des solutions.

$2x + y = 3$
$y = -2x + 3$
c'est l'équation de la droite D représentation graphique de l'app affine $x \mapsto -2x + 3$.

Les coordonnées de chaque point de D désignent une solution de l'équation ...

Représenter graphiquement les solutions de l'équation $3x - y = 5$ ... $y = 3x - 5$.

Soit le système $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$

Sont-ils des solutions du système ?

. $3 + 5 \neq 5$ donc $(3,5)$ n'est pas une solution du système.

Deux systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemples

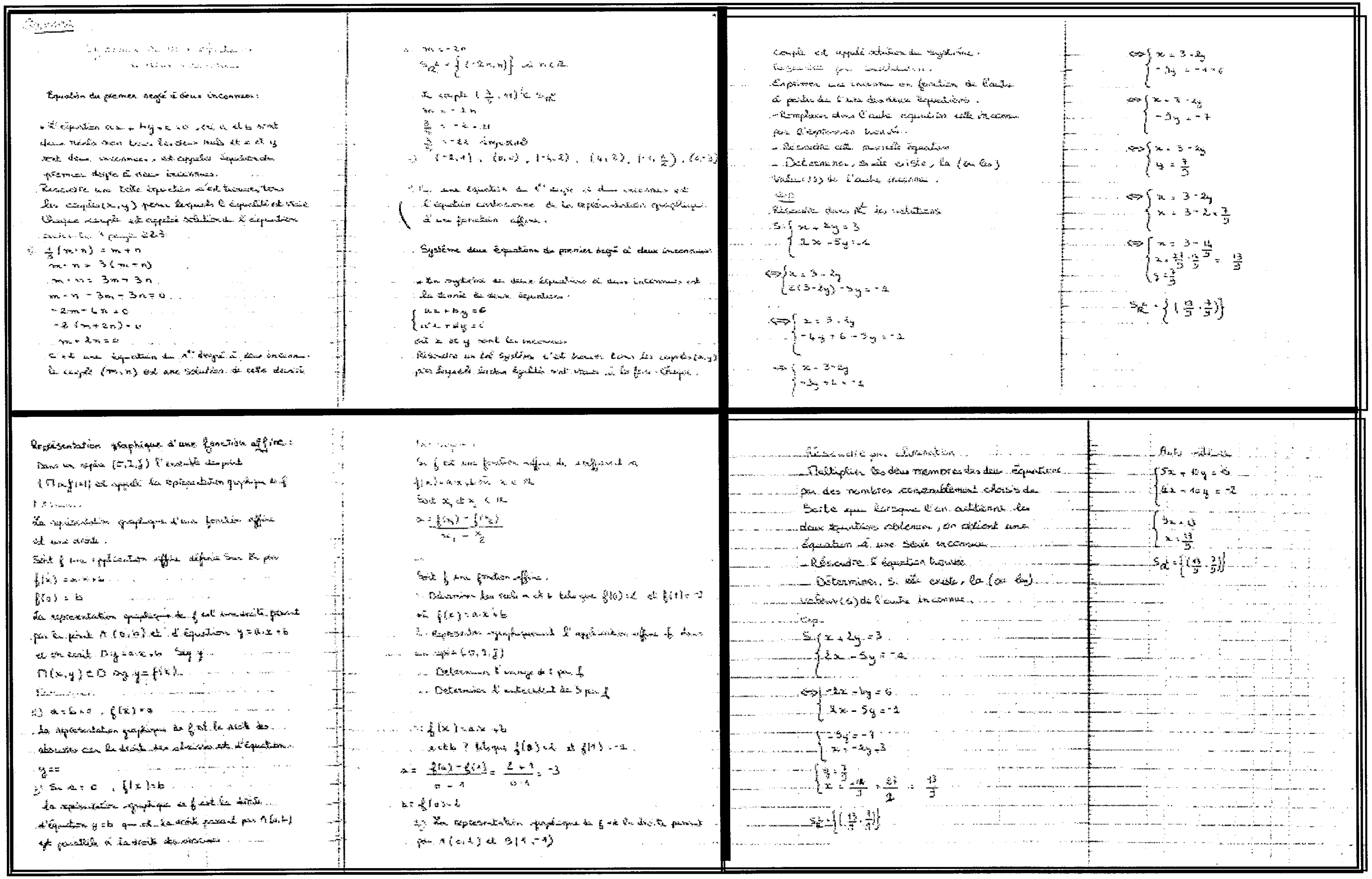
. Soit à résoudre

$S \begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$

. $x - 5y = 2$
$x = 2 + 5y$

Représenter graphiquement les solutions de l'équation $y = 2$ ...

## Extrait du cahier de Sandra


Équation du premier degré à deux inconnues :

Représentation graphique d'une fonction affine :

Système deux équations du premier degré à deux inconnues

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les solutions

$S : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 5y = -4 \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}^2} = \left\{\left(\frac{13}{9} ; \frac{7}{9}\right)\right\}$

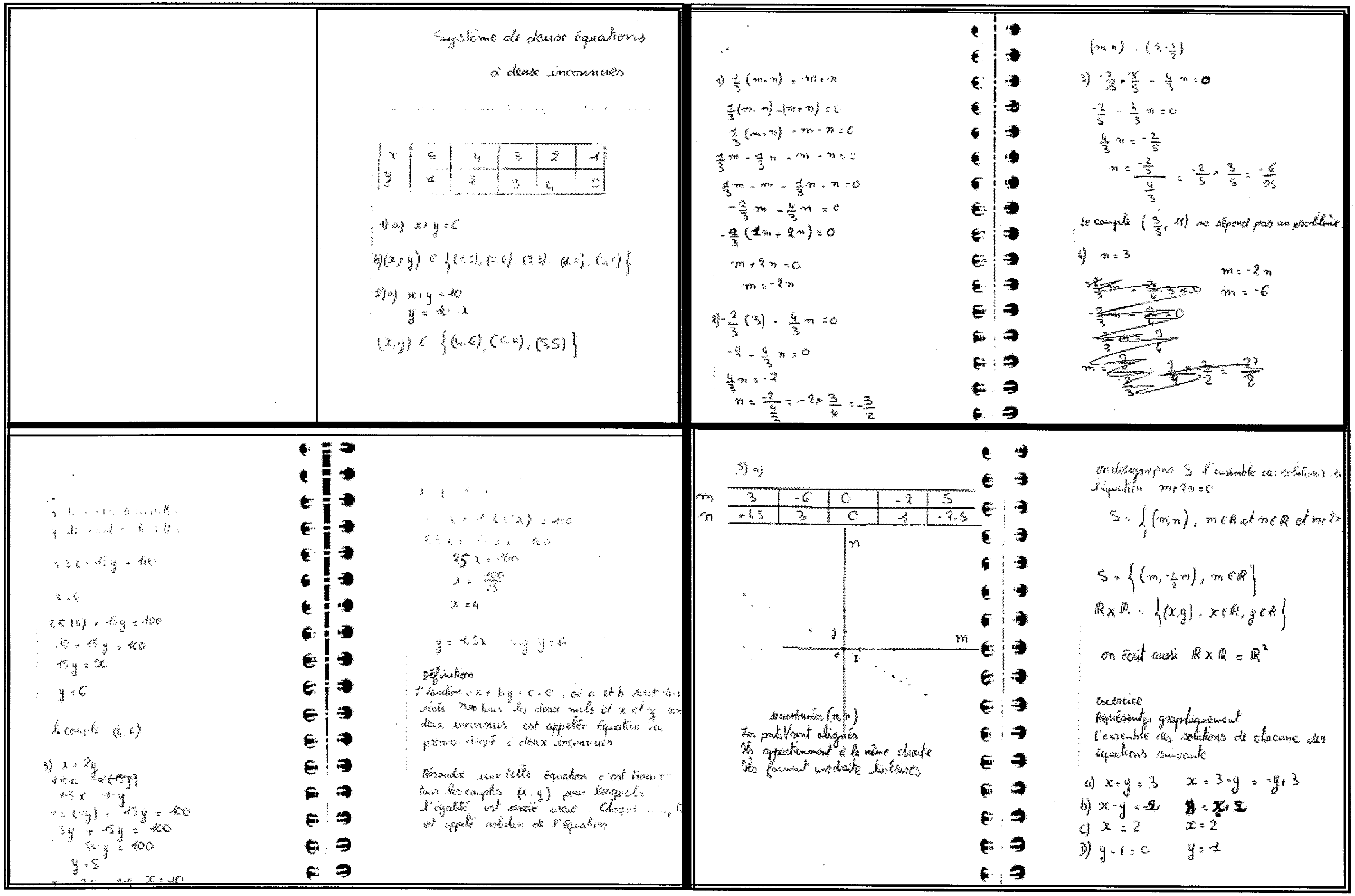
Résolution par élimination

Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsque l'on additionne les deux équations obtenues, on obtient une équation à une seule inconnue

Résoudre l'équation trouvée

Déterminer, si elle existe, la (ou les) valeur(s) de l'autre inconnue.

## Extrait du cahier de Siwar



Système de deux équations

à deux inconnues

| $x$ | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$(x, y) \in \{(4,6), (6,4), (5,5)\}$

1) $\frac{1}{3}(m-n) = m+n$

$-\frac{4}{3}(1m + 2n) = 0$

$m + 2n = 0$

$m = -2n$

$m = \frac{-2}{\frac{4}{3}} = -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$

$(m, n) = (3, -\frac{3}{2})$

$\frac{4}{3}n = -\frac{2}{5}$

le couple $(\frac{3}{5}, 1)$ ne répond pas au problème

4) $n = 3$

$m = -2n$

$m = -6$

| $m$ | 3 | -6 | 0 | -2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | -1,5 | 3 | 0 | 1 | -2,5 |

Ils sont alignés

Ils appartiennent à la même droite

$S = \{(m, -\frac{1}{2}m),\ m \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

on écrit aussi $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Exercice

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes

a) $x + y = 3$ $\quad x = 3 - y = -y + 3$

b) $x - y = 2$

c) $x = 2$ $\quad x = 2$

d) $y - 1 = 0$ $\quad y = 1$

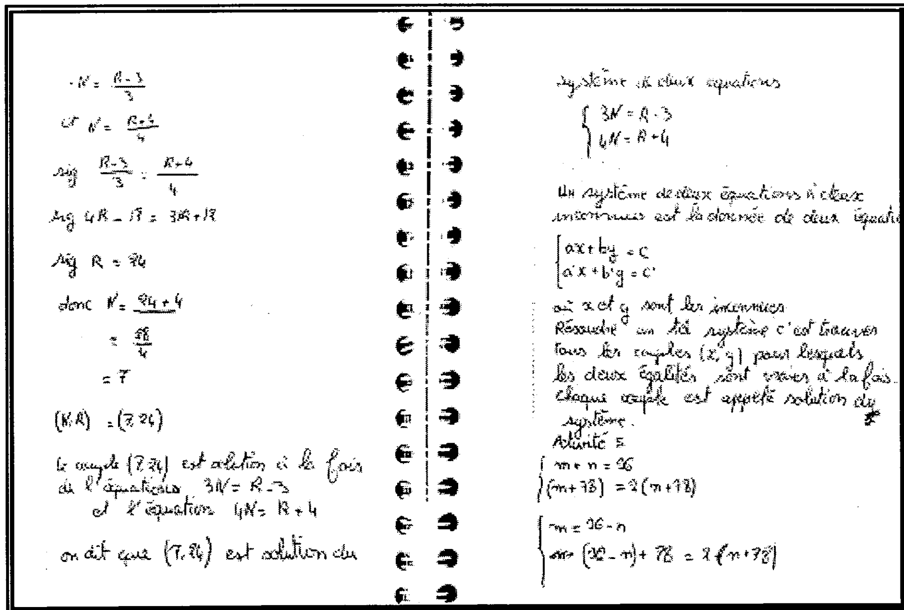
$x = 4$

$y = 6$

$y = 5$

Définition

Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples $(x, y)$ pour lesquels l'égalité est vraie.



$N = \frac{R-3}{3}$

et $N = \frac{R+4}{4}$

sig $\frac{R-3}{3} = \frac{R+4}{4}$

sig $4R - 12 = 3R + 12$

sig $R = 24$

donc $N = \frac{24+4}{4}$

$= \frac{28}{4}$

$= 7$

$(N, R) = (7, 24)$

le couple $(7, 24)$ est solution à la fois de l'équation $3N = R - 3$ et l'équation $4N = R + 4$

on dit que $(7, 24)$ est solution du

système de deux équations

$$\begin{cases} 3N = R - 3 \\ 4N = R + 4 \end{cases}$$

Un système de deux équations à deux inconnues est la donnée de deux équati

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

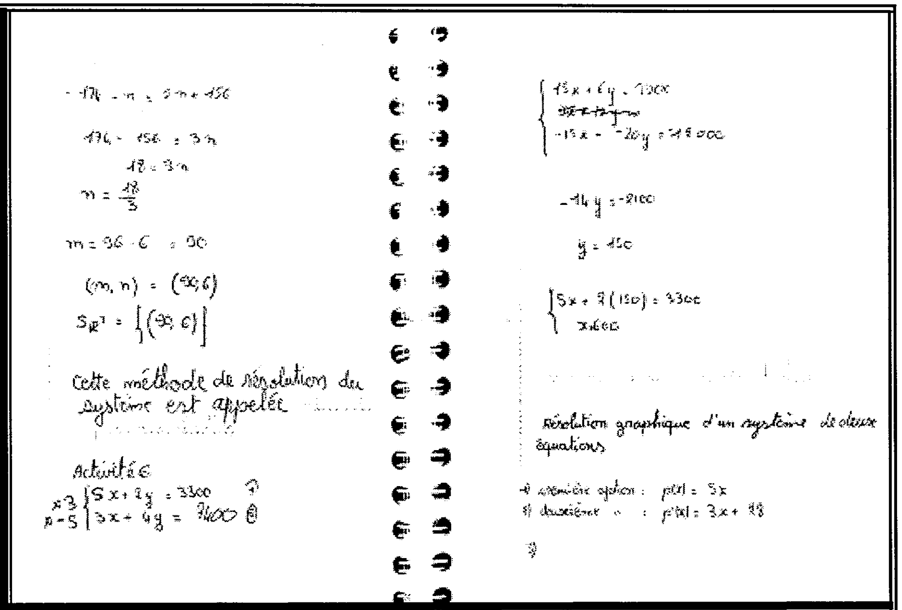
où $x$ et $y$ sont les inconnues

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x, y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois. Chaque couple est appelé solution du système.

Activité 5

$$\begin{cases} m + n = 96 \\ (m + 78) = 2(n + 78) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ (96 - n) + 78 = 2(n + 78) \end{cases}$$



$174 - n = 2n + 156$

$174 - 156 = 3n$

$18 = 3n$

$n = \frac{18}{3}$

$m = 96 - 6 = 90$

$(m, n) = (90; 6)$

$S_{\mathbb{R}^2} = \{(90; 6)\}$

Cette méthode de résolution du système est appelée ……

Activité 6

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ \times -5 \end{array} \begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ 3x + 4y = 1400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 6y = 9900 \\ -15x - 20y = 45\,000 \end{cases}$$

$-14y = -2100$

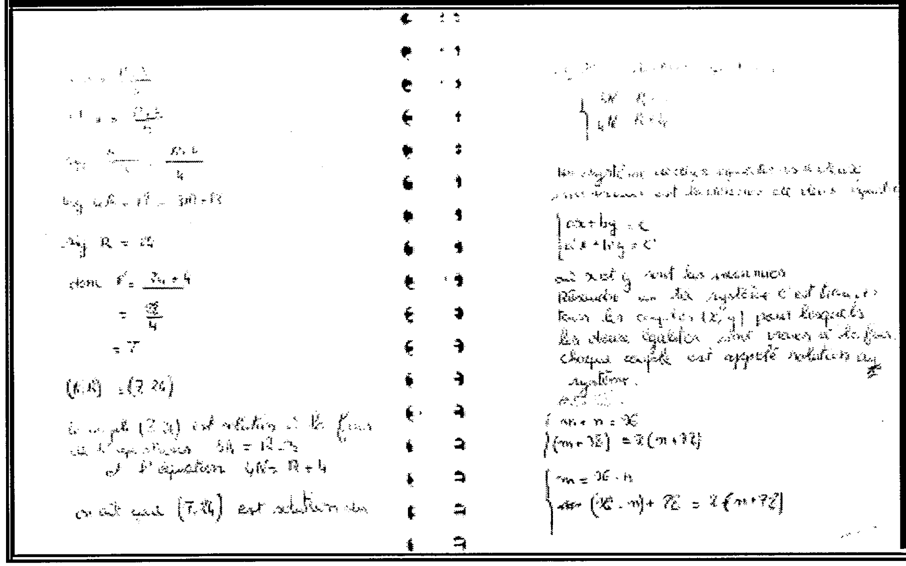
$y = 150$

$$\begin{cases} 5x + 2(150) = 3300 \\ x = 600 \end{cases}$$

Résolution graphique d'un système de deux équations

1) première option : $p(x) = 5x$

2) deuxième option : $p'(x) = 3x + 18$



$N = \frac{R-3}{3}$

et $N = \frac{R+4}{4}$

sig $\frac{R-3}{3} = \frac{R+4}{4}$

sig $4R - 12 = 3R + 12$

sig $R = 24$

donc $N = \frac{24+4}{4}$

$= \frac{28}{4}$

$= 7$

$(N, R) = (7, 24)$

le couple $(7, 24)$ est solution à la fois de l'équation $3N = R - 3$ et l'équation $4N = R + 4$

on dit que $(7, 24)$ est solution du

$$\begin{cases} 3N = R - 3 \\ 4N = R + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où $x$ et $y$ sont les inconnues

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x, y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois. Chaque couple est appelé solution du système.

$$\begin{cases} m + n = 96 \\ (m + 78) = 2(n + 78) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ (96 - n) + 78 = 2(n + 78) \end{cases}$$

**Observation du 13/04/2006 de P1, séance 1 de 9h à 10h**

1-P : Vous prenez le livre à la page 228, on commence la 1ére activité, vous écrivez le titre de la leçon et on passe à l'activité.
P écrit au tableau :
I- Equations du premier degré à deux inconnues
<u>Activité 1 p 228</u>
2- P : Silence activité n°1, commencez à répondre, allez on commence vous lisez Maroua
Maroua lit l'énoncé de l'activité à la page 228 du manuel
3-P : Est ce que le texte est clair ? Est ce que vous avez compris ? bouhaaaa...
4-P : vous avez un dé, un dé c'est un cube qui a six faces, voilà un dé (il montre un dés)on va lancer deux dés qu'elle relation entre x et y on a, sachant que x est le nombre qui apparaît sur le 1ér dés et y sur le 2ème et que la somme est égale à 6 allez qui passe au tableau
5-E1 : madame madame
E1 passe au tableau et p lui dicte :
On désigne par x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face des deux dés
1) a- La relation entre x et y est définie par : x + y =6
6-P : vous encadrez le résultat, bon 2ème question combien il y a de couples (x, y) tel que x +y =6
7- E2 : si x égal y égal 5
8- P : quelles sont les réponses possibles ?
9- E2 : x égal 3 y égal3
10-E3 : x égal 2 y égal 4
11-P : bon on va compter tous les couples
Ma roua écrit au tableau ce que p lui dicte : (3,3),(5,1) ,(2,4), (5,1) , (4,2)
12-P : il y a cinq couples, à votre place, on passe à la 2ème question essayez de répondre
(2mn de silence)
13-P : sayez, bon vous lisez d'abord
14-E4 : madame
15-P : vas-y lit
16-P : répète la question et passe au tableau
E4 passe au tableau et écrit ce que p lui dicte
2/ a- La relation entre x et y est définie par x+y = 10
17-P: La question c'est ? Dénombrer tous les couples (x,y)
18-E3 : madame
19-P : oui
20-E3 : 1plus 9
21-E1 : 2+8
22-P: ne parlez pas ensemble, shut est ce qu'on peut avoir 2+8 ? Regardez les faces ne dépassent pas...
23- E5 : oui madame encadré entre 1 et 6
24-P : on va donc dénombrer ces couples
25-E : (4,6), (5,5), (6,4)
26-P : que peut-on dire de des couples ? Chaque couple vérifie...
27-E : 6+4 égal 10
28-P : x +y = 10 est une équation à deux inconnues, on va voir ça par la suite, bon vous trouvez 3 couples, il faut indiquer sachant que x est compris entre 1 et 6
E2 passe au tableau et écrit 1<x <6
29-P : est ce qu'on peut avoir x égal 1
30- E2 : non
31-P : comment ? L'inégalité... de même
E2 modifie l'inégalité et écrit $1\leq y\leq 6$
32-P : y en a trois couples passons à la 2ème activité puis écrit au tableau :
x + y = 10 est une équation du 1er degré à deux inconnues.

33-P : Quelles sont les inconnues ?
34-E : x et y
35-P : bon on passe, vite activité 2
(2 minutes) pendant ce temps p écrit
Activité 2 pages 228
36-P : vous lisez
Un élève E1 lit l'énoncé de l'activité
37-P : Notre probléme est de modéliser la situation le prix d'une cassette est 2.500 dinars le prix d'un CD est 15 dinars et la somme d'argent est 100 dinars.
38- E2 : madame
39-P : il faut d'abord désigner x le nombre de cassettes et y le nombre de CD
p écrit au tableau et les élèves recopient :
a) On désigne par x le nombre de cassettes
On désigne par y le nombre de CD
Sachant que le prix d'une cassette est 2,500D et le prix d'un CD est 15D
b) Mise en équation
$2,500\,x + 15\,y = 100$
40-P : ça c'est une équation par la suite on suppose que Amine a acheté 4 cassettes, si x=4 qu'est ce qu'on obtient ?
E1 passe au tableau et écrit ; $4\times 2,5 + 15\,y = 100$
41-P : Bon on va organiser l'écriture (il efface le tableau)
42-P : qu'est ce qu'on cherche, on cherche ?
43-E : y
E1 résout l'équation au tableau :
$10 + 15\,y = 100$
$15\,y = 100 - 10$
$y = 90/15 = 6$
44-P : $3^{\text{ème}}$ question qui lit ?
E3 lit la question pendant que p écrit :3) le nombre de cassettes est le double de celui des CD.
45-P : Vous allez déterminer le nombre de cassettes et de CD achetés
46-E4 : $2,5 \times 2y + 15\,y = 100$
47-P : c'est juste ?
48-E5 : non
49-P: elle a dit $2,5 * 2y + 15\,y = 100$, le nombre de cassettes est le double de CD est ce qu'on peut traduire cette phrase par une égalité mathématique ?
bouhhhhh….
50-P : 2y qu'est ce que ça représente ?
51-E5 : le nombre de CD
52-P : comment traduire la phrase donc on cherche une relation entre x et y .
bouhhh….
P reprend de nouveau la question
53- E2 : $x = 2y$
54-P : d'accord on cherche maintenant le nombre de CD passe au tableau
E2 passe et écrit ce que p lui dicte : $2,5 * 2y + 15\,y = 100$
55-P: on simplifie cette écriture, on cherche y d'abord
E2 écrit $20\,y = 100$
56-P : donc…
57-E : y égal 5
58-P: donc x…
59- E : $2 \times 5$
E2 écrit $x= 2\times 5 = 10$
60-P: Si le nombre de cassettes est 10 le nombre de CD est 5, la question d'après…
E6 lit l'énoncé d la question

61-P: bon le nombre de CD est égal à une fois et demi celui des cassettes (il écrit ceci au tableau)
62-P : la relation entre x et y est ...
63-E5 : 1,5x = y
64-P : Rihab au tableau
E5 écrit au tableau : y = 1,5 x
On a 2,5 x + 15 y = 100
65-P:bon on remplace y par 1,5 x puis on cherche x et on cherche y
E2 écrit au tableau : 2,5 x + 15x 1,5 x = 100
25x = 100
x = 100/25
x = 4
66-P : donc y ? Alors.
E2 écrit : y = 1,5 x 4 = 6
67-P : bon c'est terminé, c'est tout et écrit au tableau : 2,5x + 15y = 100 est une équation du 1ée degré à deux inconnues.
68-P: du premier degré parce que l'exposant de x et y est 1, on commence l'activité 3
p écrit : activité 3 p228
2mn s'écoulent puis un élève lit l'énoncé
69-P : cette phrase m et n tel que le tiers de leur différence est égale à la somme se traduit par... passez au tableau
70-E : qu'est ce qu'on va faire ?
71-P : on va chercher les nombres.
E3 passe au tableau et écrit ce que lui dicte p : 1/3(m-n) = (m +n )
72-E1 : une valeur ?
73-P : on simplifie on peut regrouper le tout dans le 1er membre en utilisant la différence, on développe si vous voulez
E3 écrit : 1/3(m-n) - (m +n ) = 0
74P : ça s'écrit aussi...
E3 écrit : m/3 – n/3 –m – n = 0
75-P : vous simplifiez jusqu'à la fin et on regroupe les m et n
E3 écrit m/3 – 3m/3 –n/3 – 3n/3 = 0
-2m/3 – 4n/3 = 0
76-P : on aurait pu écrire m-n = 3 (m +n ) c'est plus facile encore bon alors ça s'écrit encore...
E3 écrit 2m + 4n = 0
77-P : on simplifie encore m +2n = 0
78-P: on va utiliser cette égalité jusqu'à la fin, mettre le probléme en équation c'est déjà fait .on choisit des valeurs tel que m + 2n = 0 à votre choix un couple par exemple.
79-E : 0,0
80-P : oui par exemple en remplaçant o+2x0 = 0 est ce qu'on peut prendre d'autres couples ?
bouhhh.....
81-P: c'est le seul ?
82-E: non...
83-E5 : Madame
84-E5: (-2,0)
85-P : si m=-2 cherchez n
86-E1 : n = 1
87-P : si m= -2 on obtient (il écrit au tableau)
–2 + 2n = 0
2n = 2
n = 2/2
n = 1
Donc le couple (-2,1) est solution de l'équation ou bien de cette égalité m + 2n = 0
88-P : y a –t-il d'autres ?
89-E : madame
90-P: oui ?
91-E (ensemble) (-4,2), (-6,3) (-8,4) (-10,5)...

92-P : plusieurs couples qui sont solutions de cette équation ce qui reste vous le terminez, est ce que (3/5, 11) répond au probléme ?
93-E1 : non
94-P : on remplace, pour la prochaine fois il reste deux questions.

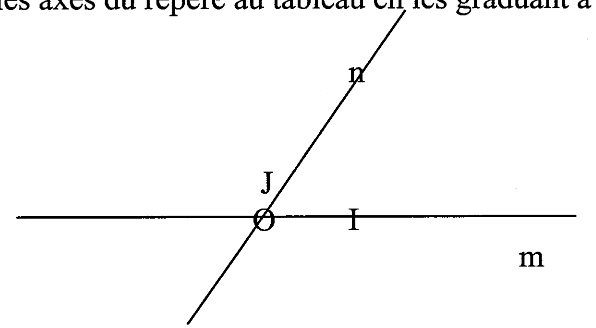
**Observation de P1 du 20/04/2006 de 9h à 10h (séance 2)**

(P1 reprend les deux dernières questions de l'activité 3 en les écrivant directement au tableau)
<u>*Activité 3 :*</u>

1) *Donner cinq couples (m,n) vérifiant $m + 2n = 0$*
2) *Placer les points de coordonnées (m,n) dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ .*

Un élève interrompe l'enseignante
1- E : madame on va terminer ça ?
2- P : oui shut, puis vos remarques, que remarquez-vous par la suite
il écrit la suite de l'activité : Que remarque t-on ?
3- allons y on passe aux couples, par exemple …
4-E1 : m égal –2, n égal 1
5-P : donc le couple de coordonnées vous avez dit !
6-E1 : (-2,1)
P écrit au tableau les propositions des élèves : (-2,1) ,(-14,7)
7-P : un autre , cinq couples on a dit
8-E2 : m moins 6, n trois
9-P : vous êtes tous d'accord oui ou non ?
10-P : bon vérification, vérifiez ! –6 + 2 x 3 = 0
11-E3 : (-8,4)
12-E4 : (-4,2)
13-P : c'est tout cinq couples on a dit
14-E5 : (-20, 10)
15- P : c'est tout cinq couples, on a choisi cinq combien y a t-il de couples solution de cette équation ?
16-E : plusieurs
17-P: bon question si m égal zéro, à quoi égal n ?
18-E1 : zéro

19- P : aussi bien (0,0) est solution de $m + 2n = 0$, il y a donc une infinité de solution de cette équation
20-P : bon, maintenant dans un repère vous allez placer les points de coordonnées
(-2,1) et tous ces couples qu'est ce que vous allez remarquer
p se met à tracer les axes du repère au tableau en les graduant à la règle




21-P: on va placer les points m et n , les points de coordonnées m,n, (-2,1) par exemple , c'est à dire...
22-E1 : -2 abscisse et 1 euh...
23-P : on va choisir cet axe l'axe des abscisses, les valeurs de quoi ? mou n ?
24-E2 : m
25- P :sur l'autre, on va mettre n, suivant l'équation
26-le point de coordonnées (-2,1) qui passe ?
27-E : madame
E4 passe au tableau et place les points en utilisant la règle
28-P : est ce qu'on peut placer –14 suivant le repère choisi ?
29-E : non
30-P : c'est un peu loin, ( il regarde l'élève qui est au tableau)
31-P : il faut utiliser le compas comme ci vous construisez un parallélogramme
E4poursuit sa construction à la règle

32-P : Jaouadi...
P répond à une élève qui lui demande si c'est possible de placer l'abscisse 14
33-P : Si on met le point de coordonnées(14,-7) , est ce qu'on peut prendre des valeurs positives pour m ?
34-E : oui
35-P : oui comme on a fait pour 14, presque les mêmes couples, mais avec d'autres points
36-E1 : symétrie madame
37-P : on une symétrie bon qu'est ce que vous remarquez pour ces points ?
38-E : alignés
39-P : donc tous ces points sont alignés
40-P : on va prendre un autre couple pour vérifier, un point de coordonnées (2, -1) par exemple
P montre du doigt le point de coordonnées (2, -1)
41-P : vous tracez la droite, l'ensemble des points du plan est une ...
42-E : droite
P dicte et E4 écrit au tableau
On remarque que les points de coordonnées (m,n) sont alignés
43-P : vous revenez à votre place, on passe à la suite
P se déplace vers son bureau et regarde le manuel ouvert
44-P : vous avez la définition p228 (il relit la définition telle qu'elle est énoncée dans le manuel)
45-P : les inconnues sont x et y on peut obtenir une équation par exemple en m et n ou u et v , lorsqu'on cherche les couples qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ , ces couples sont solution
46-P : les définitions, c'est pas la peine d'écrire au tableau, vous les avez p228, vous l'écrivez sur vos cahiers (il recommence à lire)
47-E2 : et le système madame ?

48-P : maintenant on va le voir
49-P : Bon par l suite vous écrivez (il efface le tableau pendant que les élèves recopient les définition p228 puis écrit )

II- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
Activité n°4 :

50-P : allez, vous commencez à faire l'activité 4
2mn s'écoulent, il regarde une élève qui écrit
51-p : essayez de faire l'activité, bon terminer de recopier
52-p : pour l'équation ax +by +c = 0, combien elle admet de solutions, une infinité bon on passe activité 4.
53-E3 : le quadruple, qu'est ce que ça veut dire ?
54-P : vous lisez bien l'activité, on a des boules noires et des boules rouges tel que le triple de N est égal à R diminué de 3 , écrivez cette phrase sous forme d'équation
55-E1 : 3N = R – 3
56-P: la 2ème vous suivez
Il fait passer une élève au tableau et lui dicte

1) On désigne par R : le nombre de boules rouges
N : le nombre de boules noires
57-P : mettre ce probléme sous forme d'équation
2) Mise en équation
*3N= R-3
*4N = R+4
58-P : maintenant on va chercher N et R , les valeurs de N et R doivent vérifier la 1ére et la 2éme équation, ce sont les mêmes nombres
(un silence dans la classe, p reprend)
59-P : une idée ?, on veut trouver R et N, vous avez un nombre bien déterminé de boules rouges et un nombre bien déterminé de boules noires dans la boite, ce nombre ne va pas changer, comment faire pour trouver ces nombres ?
60-E5 : on peut simplifier madame ?
61 P : donne-moi une façon pour passer au tableau.
62-E2 : la somme madame
63-P : shut…suivez, on obtient quoi, on fait 3Nplus4N égal R-3 plus R+4 , 7N égal 2R +1, une équation qui a combien d'inconnue ? on veut obtenir R tout seul et N tout seul. C'est clair ou non ?
64-E : non
65- : vous essayez de trouver une équation qui a une seule inconnue ou bien R ou bien N essayez de trouver…
66-E5 : 3N+4N + R-3 –R..
P lui coupe la parole et interroge une autre élève
67-E1 : on prend 3Nsur 4N égal R-3 sur R +4
68-P : N disparaît, si on divise, peut être bien , on fait le rapport vous essayez, peut être bien.
P écrit au tableau :
N= (R-3)/3
N= (R+4)/4
69-P : on obtient deux équations équivalentes à la 1ére, N c'est le même N.
Il continue à écrire
(R-3)/3 = (R+4)/4
p : par suite on fait.
70-E : 3fois..
71-P : produit des moyens égale produit des extrêmes ah..
4(R-3)=3(R+4)
4R – 12 = 3R +12
72-P: on obtient lors une équation à une inconnue, o, continue
4R –3R= 12+12
R = 24

73-P : est ce qu'on peut trouver N ?
74-E : oui
75-P : on remplace dans l'une des équations (en montrant du doigt)
76-P : est ce qu'il y a d'autres méthodes ?
77-E : il y a ?
78- P : oui ce n'est pas la seule réfléchis ?
P continue la résolution précédente au tableau :
On remplace R dans la 1ére équation
N = (24-3)/3 = 21/3= 7
**Vérification**
3x7=24-3=21
4x7=24+4=28
79-P : bon le couple qu'on a trouvé, vérifie les deux équations à la fois , est ce que c'est clair ?
sans attendre il écrit,
(R, N) = (24,7) vérifie à la fois l'équation 1 et l'équation 2
2) définition
un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est la donnée de deux équations $\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$
Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, c'est trouver les couples (x,y) vérifiant à la fois (1) et (2)
80-P : bon maintenant on va parler de méthode de résolution, il y a des méthodes , vous écrivez
3) Méthodes de résolution d'un système
a) ____________

Résoudre le système $\begin{cases} x-y = 5 \\ 3x+2y = 6 \end{cases}$

81-P : vous allez chercher (x,y) vérifiant à la fois la 1ére et la 2éme, bon je vous indique, exprimer x en fonction de y ou bien y en fonction de x dans la 1ére puis vous remplacez dans la 2éme ., c'est clair !
82-E : non
83-P : bon par exemple la valeur de x en fonction de y (montre la résolution au tableau)
$\begin{cases} x=y + 5 \\ 3(y+5)+2y = 6 \end{cases}$
84-p : on obtient une équation du premier degré à une inconnue
$\begin{cases} x=y + 5 \\ 3y + 15+2y = 6 \end{cases}$
85-p : shut…la première ça reste toujours, le système est équivalent à (seulement oralement)
$\begin{cases} x=y + 5 \\ 5y = 6-15 \end{cases}$
$\begin{cases} x=y + 5 \\ 5y = -9 \end{cases}$
86-p : c'est donc équivalent à (sans écrire l'équivalence)
$\begin{cases} x = y + 5 \\ y = -9/5 \end{cases}$
87-P : une fois trouvé y on remplace
88-E4 :x égal 27,26sur 5
89-P : comment ?bon on continue 16/5, l'important maintenant c'est la méthode, on vérifiera après
P écrit
$\begin{cases} x = -9/5 + 25/5 = 16/5 \\ y = -9/5 \end{cases}$
90-P : les valeurs qu'on a trouvé pour x et y, c'est le couple (x,y), qui est quoi ?
91-E : solution

92-P : allez vérifier remplacer x= 16/5 et y=-9/5 dans la 1ére équation et dans la 2éme
93-E2 : dans la 1ére ça va donc sayez
94-P : il faut qu'il vérifie les 2 à la fois , vous remplacez allez , vérifiez tout seuls
95-P : d'après vous y a-t-il d'autres méthodes, est ce que c'est la seule méthode, c'est une méthode de résolution c'est juste ou non ? Terminez..
96-E2 : oui il y a une méthode par substtt..ituant, on fait un développement madame, on multiplie par 2…
97-P : cette méthode s'appelle par substitution
Il écrit au tableau en complétant le sous titre laissé auparavant

a) méthode par substitution

98-E3 : ou bien par élimination
99-P : attendez , shut j'attend que vous vérifiez, vérifiez ce résultat si c'est juste ou c'est faux
100-E : on remplace
101-E5 : faux
102-P : pourquoi non, vous remplacez dans le système donné (en montrant du doigt, le système de départ) attention le système donné
p écrit au tableau en répétant
16/5 – (-9/5) = 5
3x 16/5 +2 x (-9/5) = 6
103-P : donc le couple (16/5, -9/5) est solution du système c'est clair ou non ?
(Pas de réponses)
104-P : bien on va désigner après l'ensemble des solutions, 2éme méthode, vous écrivez b, je vais garder le même système et le résoudre d'une autre façon
p écrit
b) ______________

104-p : vous laissez de la place
il réécrit le système $\begin{cases} x-y = 5 \\ 3x+2y = 6 \end{cases}$
105-E2 : élimination, c'est à dire « nahiou » (on enlève en langue arabe) ah.
106-P : shut, attendez shut, on prend le même système, on va changer de méthode, on va essayer de trouver un nombre par lequel on va multiplier la 1ére ou la 2éme de telle façon lorsqu'on va additionner les deux équations le 1er membre avec le 1er membre et le 2éme membre avec le 2éme membre, l'une des inconnues x ou y va être éliminée.
107-P : bon quel réel, on veut éliminer x, on multiplie par …
108-E1 : 3
109-P : on va multiplier la 1ére équation par (-3), on choisit nous même par (-3)
P écrit au tableau
$\begin{cases} (-3) \mathbf{x} (x - y) = (-3)\mathbf{x}\, 5 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$
110-E : la somme
111-P : attendez le système est équivalent à …, on choisit de façon à éliminer x et y
$\begin{cases} -3x + 3y = \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$
112-P : puis qu'est ce qu'on fait ?
113-E : on ajoute madame
114-P : on obtient une équation qui lui est équivalente, -3x+3x ça s'en va…
P écrit
$\begin{cases} 5y = -9 \\ x - y = 5 \end{cases}$
115-E2 : pardon madame à quoi égal y ?
116-E1 : y = -9/5

117-E3 : x= -9/5
118-E4 : on peut changer, c'est la même chose
119-P : quel est le problème, qu'est ce qu'on va résoudre ici, on a 5y = -9
P écrit

$$\begin{cases} y = -9/5 \\ x = 5 + (-9/5) = 16/5 \end{cases}$$

Donc le couple (-9/5, 16/5) est solution du système
120-P : on peut noter S ensemble de solution, attendez attendez on va écrire c'est quoi cette méthode, cette méthode s'appelle (il revient au sous titre et écrit)
b) <u>Méthode par élimination</u>
121-P : exercice pour la prochaine fois
122-E : demain madame
123-P : la prochaine fois, exercice 1 p237. et l'activité 9,

**Observation de P1 du 22/04/2006 de 10h à 11h (séance 3)**

1. P : on corrige l'exrcice1, il y a beaucoup d'exemples, on va corriger un seul, qui passe au tableau ?
2. E1 : madame, madame
3. P : oui allez-y
(E1 passe au tableau et écrit le système suivant)

$$\begin{cases} -2a + b = 12 \\ -3a - 4b = 7 \end{cases}$$

4.E : je multiplie par 4
5.P : écris d'abord c'est quoi la méthode
E1 écrit à coté du système (par élimination) et continue sans l'aide de p1

$$\begin{cases} -8a + 4b = 48 \\ -3a - 4b = 7 \end{cases}$$

$-11a = 55$
$a = -55/11 = -5$

$$\begin{cases} a = -5 \\ -2a + b = 12 \text{ alors } b = 12 + 2a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 12 - 10 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = 2 \end{cases}$$

6. p: vous écrivez donc S égal quoi ?
7. E : le couple…
8. P écrit $S_{IR^2} = \{(-5,2)\}$
9. E :bouhaa…madame
10. P : taisez vous silence, je vous ai donné l'activité 9, vous l'avez fait ou non, concernant l'exercice il y a beaucoup de systèmes à résoudre?
11. E : on a essayé…
P écrit au tableau

**Activité 9 p 230:**

E1 lit l'énoncé p relit sans écrire

12. P : combien on va obtenir d'équations ?

13. E : deux

14. P : qu'est ce que ça désigne x et y ?

15. E1: x l'aîné, y le cadet

16. P : la part du fils aîné x et y c'est la part du fils cadet et après vous allez mettre le probléme sous forme de deux équations .

17. E2 : x plus y égal 800 et x divisé par 3 et y divisé par 2 = 800

18. P : est ce que c'est vrai ? lis bien la phrase (et se tourne vers le tableau pour écrire)

1) On désigne par

x : la part du fils aîné

y : la part du fils cadet

2) Mise du probléme en équation

$x + y = 800$ (1) (il s'arrête et interroge)

19. P : la 2éme équation , la part du 1er divisé par 3 et la part du 2éme divisé par 2 on trouve aussi 800 comment ?, lisez bien la phrase.

20. P : les deux parts sont proportionnels aux nombres de leurs enfants respectifs

21.E : bouhaa….

22.P : les deux parts sont proportionnels à 2 et 3 c'est à dire… Bouhaaa….

23. P : x et y sont proportionnels à 3 et 2 comment on peut écrire cette phrase sous forme d'équations

24. E2 : x divisé par y

25. E3 : x plus y sur 3 plus 2

26. P :x sur trois égal….

27. E1 : y sur 2

28. P : x et y sont proportionnels à 3 et 2 signifie…

P écrit au tableau

$x/3 = y/2$ (2)

29. E4 : quoi proportionnel ?

30. P : il faut chercher x et y vérifiant à la fois 1 et 2

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ x/3 = y/2 \end{cases}$$

31. P : la méthode la plus , la plus compatible, quelqu'un passe au tableau , oui Heithem

E3 écrit

$$\begin{cases} x= 800-y \\ (800-y)/3 = y/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x= 800-y \\ 800-y \times 2 =y\times 3 \end{cases}$$

32. P: met les parenthèses, on obtient la 2éme une équation du premier degré à une inconnue on cherche y

$$\begin{cases} x= 800-y \\ (800-y) \times 2 =y\times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x= 800-y \\ 1600 -2y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x= 800-y \\ 166 = 3y +2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x= 800-y \\ 1600 = 5y \end{cases}$$

$y = 5/1600$

33. E1 : non madame 1600sur 5

34. E3 corrige machinalement puis s'arrête

$y = 1600/5 =$

35. P : soit vos calculatrices

36. E1 : 320

E3 écrit
y = 320
x = 800-320 = 480
37.P : on peut vérifier
E3 écrit
$S = \{480, 320\}$
38.P : rajoute les parenthèses vérifiez ...
39.E6 : pourquoi on met pas IR au carré madame ?
40. P : c'est pareil c'est une solution (et rajoute au tableau)
$S_{IR}{}^2 = \{(480, 320)\}$
**Vérification**
480 + 320 + 800
480/3 + 160 et 320 /2 = 160
41.P :il reste une autre méthode vous écrivez (p se dirige vers son bureau et regarde son manuel)
**3/ Utiliser un graphique pour connaître les solutions éventuelles d'un système.**
42.P : vous faites l'activité 11p 230
P écrit au tableau :
**Activité 11p 230**
3 mn s'écoulent
43.P : on commence à lire l'activité, oui Inès
Inès lit l'activité comme si elle lisait un texte narratif
44. P : est ce que vous avez compris le problème ? on peut payer par séance ou bien faire un abonnement , quelle est l'option la plus économique ?
(Pas de réponse, le professeur reprend)
45.P: 5dinars par séance ou bien la 2ème option un abonnement de 28 dinars pour 3 séances ?
(Toujours pas de réponse)

46. P : par exemple on va faire 2 séances combien on va payer , 10 dinars...on va résoudre l problème mathématiquement, on va déterminer p(x) en fonction de x, silence !
bouhaaaa......
47.P : si on va utiliser la premiére option p(x) égale...
(Aucune réponse)
p : p(x) égale 5x , pour la 2ème option p'(x) égal ...
ah.....
48. P : 28 + 3x
49. p: la 1ére fonction est ...
50. E : linéaire
51. P : la 2ème fonction est..
52. E : affine
53. P : on va reprendre ces deux fonctions, bon on commence allons-y p(x) égal quoi ?
54. E : 5x
55. P : c'est une fonction..
56. E : linéaire
57. P : allez-y au tableau Amel
(Amel écrit au tableau ce que lui dicte P1)
1) On désigne par x le nombre de séances
P : p(x) et p'(x) c'est quoi ?
(Pas de réponse)p dicte à Amel qui écrit au tableau
p(x) et p'(x) désignent les prix à payer pour x séances respectivement pour la 1ère et la 2ème option.
2) p(x) = 5x
p'(x) = 28 + 3x
58. P : la premiére c'est une fonction..
59. E : linéaire
60. P : la 2ème
61. E : affine

Amel écrit : P : est une fonction linéaire ; p' : est une fonction affine.

62. P : vous savez bien que la fonction linéaire se représente par une droite, bon on va faire des tableaux de valeurs.

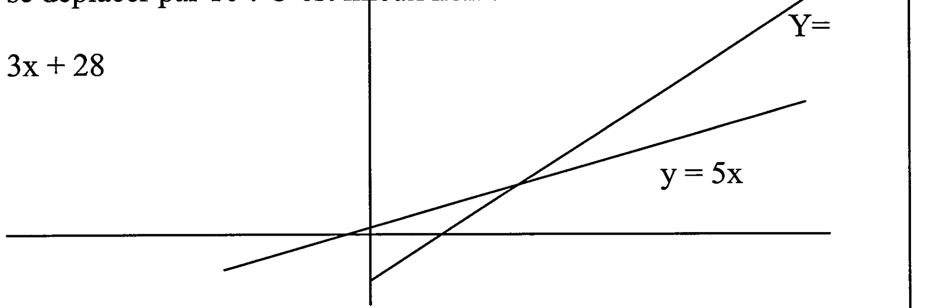
| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P(x) | 0 | 5 |

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P'(x) | 28 | 31 |

63. P : ça suffit, 28 c'est trop ? qu'est ce qu'on va faire, bon termine, shut…
64. E2: On prend –7 Madame
65. E3: -5
66. P: Quoi? On va payer des séances négatives?
67. P : le repère maintenant, commence en bas , il n'y a pas de valeurs négatives, shut…
68. P : Le choix du repère, Bon termine de tracer, vous y pensez en même temps

Amel gradue les axes à l'aide de la règle

69. P : L'image de 0 c'est 28 comment on va placer 28 ? On peut se déplacer par 10 ! C'est mieux non ?




70. P : la $1^{ère}$ droite bon qui est la représentation graphique de la droite y = 5x, la $2^{ème}$ l'image de 0 est 28 attendez elles vont se couper en un point, est ce qu'on peut déterminer les coordonnées graphiquement puis par le calcul.
71. P : graphiquement ? Appelons A
72. E : 75
73. E3 : non madame ce n'est pas ça
74. P : il faut être précis, on peut ajouter quelques valeurs de x et ajouter d'autres points qu'est ce que vous remarquez pour A Bouhaaa…..
75.P : il doit vérifier la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$.

Si x = 24 ? Silence

Pécrit au tableau :

D : y = 5x

D' : y = 3x + 28

76. P : Il faut vérifier à la fois la $1^{ère}$ et la2ème à la fois, les deux options sont équivalentes lorsque p(x) = p'(x).

P(x) = p'(x)

5x = 3x +28

On détermine 2x = 28

x = 14

Lorsque x = 14, cette valeur là, qu'elle est le montant à payer, p écrit au tableau :

Pour x = 14

p (14) = 70

p' (14) = 3x14 + 28 (shut)

= 70

77. p :Le montant est le même.
78. P : normalement il faut le trouver graphiquement d'abord ensuite par le calcul A(4,70)
79. P : à partir de combien de séances ça devient moins cher, plus économique ?
80. P : par exemple après 14, e, dessus avant 14 en dessous regardez ( en montrant le repère) Lorsque x supérieur à 14 la $2^{ème}$

option est plus avantageuse , lorsque x inférieur à 14 la 1ère option est la plus avantageuse.

**Observation du 9 mai 2006 de $P_1$ de 16h à 171h (séance 4)**

1. P : shut, prenez vos cahiers, on va résoudre des systèmes graphiquement
P écrit au tableau (les élèves ne suivent pas et sont très agités)
Exercice
Résoudre dans $IR^2$, chacun des systèmes suivants, graphiquement puis vérifier le résultat trouvé par le calcul
2. P : chaque système vous le représentez seul dans un graphique
3. E : madame, je monte au tableau ?
4. P : shut, travaillez d'abord
5. E : bouhaaaa
6. P : comment faire pour résoudre $S_1$ ?
7. E2 : on choisit trois réels
8. P : ou trois couples de réels
9. E2 : des couples pour la 1ere et la 2ème
10. P : c'est quoi les représentations graphiques ?
11. E2 : deux droites
P écrit au tableau
On désigne par :
$D_1$ : la représentation graphique de l'équation $3x + 2y = 17$
D2 : la représentation graphique de l'équation $x - 5y = 0$
P : qu'est ce qu'on va faire ?
E : des valeurs
P écrit au tableau
D1 :

| | | |
|---|---|---|
| x | | |
| y | | |

D2

| | | |
|---|---|---|
| x | | |
| y | | |

12. P : si x égal 0 terminez
E1 : madame
P : oui allez au tableau
x=0
y = 17/2
Si x=3
3x3+2y = 17
9 +2y = 17
9 + 8 = 17 donc 2y=8 et y = 4
13. p : deux couplent suffisent ?
14. E2 : oui madame, ça va pour une droite
P rajoute le couple (1,7)

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 3 | 1 |
| y | 17/2 | 4 | 7 |

15. P : passons à D2
E1 écrit au tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 5 |
| y | 0 | 1/5 | 1 |

16. P : qu'est ce qu'on fait après ?
17. E : un repère
18. E3 : repère orthonormé madame ?
19. P : non quelconque, mais il faut choisir un bon repère pour pouvoir représenter tes points.
E1 trace au tableau

20. P : une fois que vous avez tracé ces deux droites qu'est ce que vous remarquez ?
21. E : parallèles
22. P : quoi ?
23. E : sécantes, (pendant ce temps E1 trace au tableau)
24. P : allez vous tracez avec des couleurs différentes les deux droites
25. E4 : fonction affine
26. P : quoi les deux ?
27. E4 : non l'autre linéaire parce qu'elle passe par l'origine
28. P : bon qu'est ce qu'on remarque pour ces deux droites ?
29. E2 : se coupent en un point
30. P : et ce couple que représente-t-il pour le système ?
31. E : la solution
P dicte à E1 qui écrit :
$D1 \cap D2 = (5,1)$
32. E: madame S dans $IR^2$ ?
33. P : oui on vérifie maintenant le résultat par le calcul…silence !
34. E1 passe au tableau
35.P : si on vérifie le résultat trouvé graphiquement ,par le calcul

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

E1 écrit :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ -3x + 15y = 3 \end{cases}$$

36. P : attention 0 multiplié par –3 égal à 3 ?
37. E1 : Ah…non 0
38. P: puis on ajoute membre à membre les deux équations, c'est plus facile
39. E1 : 3x + (-3x) +2y +15y = 17 +0 donc 17y = 17, y =1
x – 5x1 = 0
x –5 = 0
$S_{IR^2} = \{(5,1)\}$
40.P : bon de la même façon le 2ème système.

$$\begin{cases} 2/5x - 1/3y + 3 = 0 \\ -6x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

41. p : fixez x et chercher y ou bien fixer y et chercher x ,c'est la même chose
p écrit au tableau :
$D_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x | | | | |

D2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| y | | | | |

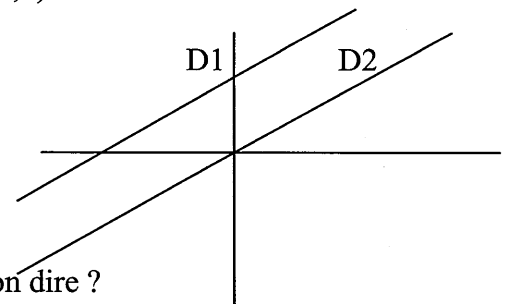
42. P : bon si x=0 vous allez chercher y
43. E2: y égal 2
44. E3: y égal –3 non 3
45. P : remplacez x par o vous allez trouver et écrit au tableau :
$-1/3y + 3 = 0$
$-1/3y = -3$
46. E3 : y égal –3 sur –1/3
47. P : ou bien : $y = -3 \times (-3) = 9$
Maintenant si x = -5, o, remplace on trouve 5

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -5 |
| y | 9 | 3 |

et maintenant deux couples ça suffit mais pour pas se tromper vous pouvez choisir un autre couple.
P : bon D2 (seul)

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -1 |
| y | 1/5 | -1 |

48. E7 : comment madame 9 pour la première ?
49. P : remplace x par 0 et y par 9 est ce que c'est solution ?
50. P : on termine par un troisième couple ou ça suffit ?
51. E : ça suffit
52. P : bon ajoutons par exemple 2 quoi ?
53. E1 13/5
54. P : bon passez au tableau pour représenter et placez le point de coordonnées (0,9)




55. P : que peut-on dire ?
56. E : y a pas de solution de ce système
57. P : quoi ?
58. E : l'ensemble vide
59.ha ha ha…
60. P : représentez on va voir
Pendant ce temps E1 est au tableau
61. P : on remarque donc que les droits sont ….
62. E2 : parallèles
P écrit $D1 \cap D2 = \emptyset$
$S_{IR^2} = \emptyset$
63. P : vérifiez le résultat par le calcul
64. E : par substitution madame ?
65. P : pourquoi ?
66. E : on ne peut pas élimination…il n'ya pas un réel…
67. P : comment ? Il faut chercher a tel que a x 2/5 = 6
68. E : écrit au tableau a x 2/5 = 6
a= 6x 5/2 =15
On multiplie la 1ère par 15 si on veut obtenir x
E1 est au tableau et écrit ce que lui dicte p

$$1+2\begin{cases} 6x - 5y + 45 = 0 \\ -6x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45 - 1 = 0 \\ \end{cases}$$

$44 = 0$

$S_{IR^2} = \emptyset$

69. P : essayez avec le 3ème, allez…
70. E : bouhhh
71. P : maroua au tableau termine le troisième

$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -1/2x + y = 1/2 \end{cases}$

72. p tourne dans les rangs
73. E : je ne trouve pas D2 qui passe par l'origine
74. P : ça ne passe pas attention, c'est proche mais ça ne passe pas…

P écrit :

D1

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | -1 |
| Y | 1/2 | 1 | 0 |

D2

| | | |
|---|---|---|
| X | 0 | -1 |
| Y | 1/2 | 0 |

75. P : pour D2 si x égal 0…
76. E3 : on trouve ½
77. P : qu'est ce que vous remarquez dans le tableau de valeurs ?
78. E : même ligne
79. P : quoi ? C'est la même…
80. E : droite madame
81. P : les droites sont confondues
82. E5 : c'est donc pas la peine de représenter, c'est clair elles sont confondues
83. P : comment on va représenter l'ensemble des solutions de ce système ?
84. E : tous les couples madame
85. P : comment on représente ?
86. E : x égal y madame
87. E2 : tous les couples (x,y) qui vérifient la 1ère et la 2ème équation
88. P : qu'est ce qu'on trouve, il y a une infinité de couples, pas tous les réels mais pas n'importe quels réels, ceux qui vérifient les deux équations. qui cherche ?
89. E3 : vous nous donnez +1 madame?
90. P : shut, on cherche y en fonction de x, allez

E1 écrit au tableau ce que lui dicte p : $y = 1/2x + ½$

91. P : On obtient tous les couples (x,y) tel que $y = 1/2x + 1/2$

P écrit $S_{IR^2} = \{(x,y),\ y = ½x + 1/2\}$ Ou bien

$\{(x,\ 1/2x + 1/2),\ x \in IR\}$

**Observation du 9 mai 2006 de $P_1$ séance 5 de 16h à 171h**

1. P : shut, prenez vos cahiers, on va résoudre des systèmes graphiquement

P écrit au tableau (les élèves ne suivent pas et sont très agités)

Exercice

Résoudre dans $IR^2$, chacun des systèmes suivants, graphiquement puis vérifier le résultat trouvé par le calcul

$S_1 \begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$ $S_2 \begin{cases} 2/5x - 1/3y + 3 = 0 \\ -6x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$ $S_3 \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 1/2x + y = ½ \end{cases}$

2. p : chaque système vous le représentez seul dans un graphique
3. E : madame , je monte au tableau ?
4. P : shut, travaillez d'abord
5. E : bouhaaaa
6. P : comment faire pour résoudre $S_1$ ?
7. E2 : on choisit trois réels
8. P : ou trois couples de réels
9. E2 : des couples pour la 1ere et la 2ème
10. P : c'est quoi les représentations graphiques ?
11. E2 : deux droites
12. P écrit au tableau

On désigne par :

$D_1$ : la représentation graphique de l'équation $3x + 2y = 17$

D2 : la représentation graphique de l'équation $x - 5y = 0$

13. P : qu'est ce qu'on va faire ?

14. E : des valeurs

P écrit au tableau

D1 :

| | | |
|---|---|---|
| x | | |
| y | | |

D2

| | | |
|---|---|---|
| x | | |
| y | | |

15. p: si x égal 0 terminez

16. E1: madame

17.P : oui allez au tableau

$x=0$

$y = 17/2$

Si $x=3$

$3x3+2y = 17$

$9 + 2y = 17$

$9 + 8 = 17$ donc $2y=8$ et $y = 4$

18. p : deux couplent suffisent ?

19. E2 : oui madame, ça va pour une droite

P rajoute le couple (1,7)

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 3 | 1 |
| y | 17/2 | 4 | 7 |

20. P : passons à D2

E1 écrit au tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 5 |
| y | 0 | 1/5 | 1 |

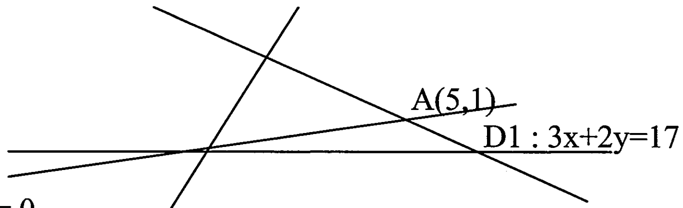
21. P : qu'est ce qu'on fait après ?

22. E : un repère

23. E3 : repère orthonormé madame ?

24. P : non quelconque, mais il faut choisir un bon repère pour pouvoir représenter tes points.

E1 trace au tableau




D2 : $x - 5y = 0$

25. P : une fois que vous avez tracé ces deux droites qu'est ce que vous remarquez ?

26. E : parallèles

27. P : quoi ?

28. E : sécantes, (pendant ce temps E1 trace au tableau)

29. P : allez vous tracez avec des couleurs différentes les deux droites

30. E4 : fonction affine

31. P : quoi les deux ?

32. E4 : non l'autre linéaire parce qu'elle passe par l'origine

33. P : bon qu'est ce qu'on remarque pour ces deux droites ?

34. E2 : se coupent en un point

34. P : et ce couple que représente-t-il pour le système ?

36. E : la solution

37. P dicte à E1 qui écrit :

$D1 \cap D2 = (5,1)$

38. E : madame S dans $IR^2$ ?

39. P : oui on vérifie maintenant le résultat par le calcul…silence !

E1 passe au tableau

40. P : si on vérifie le résultat trouvé graphiquement, par le calcul

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

E1 écrit :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ -3x + 15y = 3 \end{cases}$$

41. P : attention 0 multiplié par –3 égal à 3 ?
42. E1 : Ah…non 0
43. P: puis on ajoute membre à membre les deux équations, c'est plus facile
44. E1 : 3x + (-3x) +2y +15y = 17 +0 donc 17y = 17, y =1

x – 5x1 = 0

x –5 = 0

$S_{IR^2} = \{(5,1)\}$

45. P : bon de la même façon le 2ème système.

$$\begin{cases} 2/5x - 1/3y + 3 = 0 \\ -6x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

46. p : fixez x et chercher y ou bien fixer y et chercher x, c'est la même chose

p écrit au tableau :

$D_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| x | | | | |

D2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | | | |
| y | | | | |

47. P : bon si x=0 vous allez chercher y
48. E2: y égal 2
49. E3: y égal –3 non 3
50. P : remplacez x par o vous allez trouver et écrit au tableau :

-1/3y +3 = 0

-1/3y = -3

51. E3 : y égal –3 sur –1/3
52. P : ou bien : y = -3 x(-3) =9

maintenant si x = -5, o, remplace on trouve 5

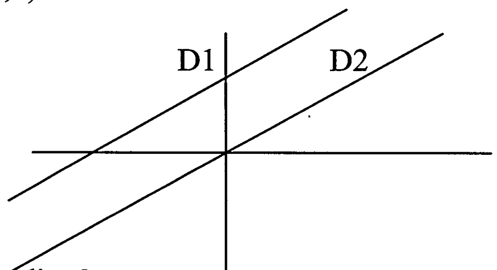
| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -5 |
| y | 9 | 3 |

et maintenant deux couples ça suffit mais pour pas se tromper vous pouvez choisir un autre couple.

53. P : bon D2 (seul)

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -1 |
| y | 1/5 | -1 |

54. E7 : comment madame 9 pour la première ?
55. P : remplace x par 0 et y par 9 est ce que c'est solution ?
56. P : on termine par un troisième couple ou ça suffit ?
57. E : ça suffit
58. P : bon ajoutons par exemple 2 quoi ?
59. E1 : 13/5
60. P : bon passez au tableau pour représenter et placez le point de coordonnées (0,9)




61. P : que peut-on dire ?
62. E : y a pas de solution de ce système
63. P : quoi ?
64. E : l'ensemble vide ha ha ha…
65. P : représentez on va voir
66. Pendant ce temps E1 est au tableau
67. P : on remarque donc que les droits sont ….
68. E2 : parallèles

P écrit $D1 \cap D2 = \emptyset$

$S_{IR^2} = \emptyset$

69. P : vérifiez le résultat par le calcul
70. E : par substitution madame ?
71. P : pourquoi ?
72. E : on ne peut pas élimination…il n'ya pas un réel…
73. P : comment ? il faut chercher a tel que a $\times 2/5 = 6$

Et écrit au tableau a $\times 2/5 = 6$

$a = 6 \times 5/2 = 15$

On multiplie la 1[ère] par 15 si on veut obtenir x

E1 est au tableau et écrit ce que lui dicte p

$$1+2 \begin{cases} 6x - 5y + 45 = 0 \\ -6x + 5y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45 - 1 = 0 \\ 44 = 0 \end{cases}$$

$S_{IR^2} = \emptyset$

74. P : essayez avec le 3[ème], allez…
75. E : bouhhh
76. P : maroua au tableau termine le troisième

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -1/2x + y = 1/2 \end{cases}$$

p tourne dans les rangs

77. E : je ne trouve pas D2 qui passe par l'origine
78. P : ça ne passe pas attention, c'est proche mais ça ne passe pas…

P écrit :

D1

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | -1 |
| Y | 1/2 | 1 | 0 |

D2

| | | |
|---|---|---|
| X | 0 | -1 |
| Y | 1/2 | 0 |

79. P : pour D2 si x égal 0…
80. E3 : on trouve ½
81. P : qu'est ce que vous remarquez dans le tableau de valeurs ?
82. E : même ligne
83. P : quoi ? c'est la même…
84. E : droite madame
85. P : les droites sont confondues
86. E5 : c'est donc pas la peine de représenter, c'est clair elles sont confondues
87. P : comment on va représenter l'ensemble des solutions de ce sytéme ?
88. E : tous les couples madame
89. P : comment on représente ?
90. E : x égal y madame
91. E2 : tous les couples (x,y) qui vérifient la 1[ère] et la 2[ème] équation
92. P : qu'est ce qu'on trouve, il y a une infinité de couples, pas tous les réels mais pas n'importe quels réels, ceux qui vérifient les deux équations. Qui cherche ?
93. E3 : vous nous donnez +1 madame?
94. P : shut, on cherche y en fonction de x, allez
95. E1 écrit au tableau ce que lui dicte p : $y = 1/2x + ½$
96. P :. On obtient tous les couples (x,y) tel que $y = 1/2x + 1/2$
97. P écrit $S_{IR^2} = \{(x,y) , y = ½ x + 1/2\}$

Ou bien $\{(x, 1/2x + 1/2), x \in IR\}$

## Les évaluations proposées par P1 :Année 1

**Exercice n°1 :**

Soit le système (S) $\begin{cases} 2x + 4y - 2 = 0 \\ 3x + y - 8 = 0 \end{cases}$

I/ 1/ Résoudre dans IR x IR graphiquement le système (S)

2/ Résoudre dans IR x IR par le calcul le système (S)

3/ Déduire la résolution du système

$$(S')\begin{cases} x^2 + \dfrac{2y+2}{2y-1} = 1 \\ 3x^2 + \dfrac{y+1}{2y-1} - 8 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2 :**

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ on donne les points A (2,-1), B (5,5) et C (-4,2).

I/ 1/ Montrer que les points A, O et C sont alignés.

2/ Calculer les distances AB, AC et BC.

En déduire la nature du triangle ABC.

3/ Soit G centre de gravité de ABC.

Déterminer les coordonnées du point G.

II/ 4/ Soit r le quart de tour direct de centre A.

Déterminer r (B). En déduire l'image de la droite (AB) par r.

5/ On pose C' = r(C )

a- Construire C' puis montrer que A= B * C'

b- On pose O' = r(O) Montrer que O' $\in$ (AC').

c- Montrer que (BO) ⊥ (CO') que représente le point O pour le triangle BCO'.

**Bon courage**

**Exercice n°1** - (7 points)

1/ a) Trouver deux couples solutions pour chacune des équations suivantes .

$$4x - y + 11 = 0 \quad \text{et} \quad x + \frac{1}{3}y + 1 = 0$$

b) Dans un repère cartésien du plan $(o,\vec{i},\vec{j})$, représenter les droites :

$D_1 : 4x - y + 11 = 0$ et $D_2 : x + \frac{1}{3}y + 1 = 0$

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $D_1$ et $D_2$ graphiquement et par le calcul.

2/ Dans le même repère tracer la droite $D_3$ : $3x + y + 10 = 0$

3/ Résoudre dans IR x IR les systèmes :

$$(1)\ \begin{cases} x + \frac{1}{3}y = -1 \\ 3x + y = -10 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\ \begin{cases} 4x - y + 11 = 0 \\ 3x + y + 10 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2** : (5 points)

Soit une droite Δ munie d'un repère $(O,\overrightarrow{OI})$ et les points A et B d'abscisses respectives 2 et -1

1/ Déterminer l'abscisse du point C symétrique de B par rapport à A.

2/ Trouver les points N de Δ tels que $\frac{NA}{3} = \frac{NB}{4}$.

3/ Trouver le point M de Δ tel que $4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

4/ Déterminer l'abscisse de M dans le repère $(A,\overrightarrow{AB})$.

5/ Existe-t-il un point K de Δ d'abscisse x tel que $|x-2| + |x+1| = \frac{3}{2}$ ?

**Exercice n°3** : (8 points)

Dans le plan muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(1,2) ; B(5,0) ; C(3,-5) et D(-1,-3)

1/ Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2/ Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

3/ Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

a) Montrer que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

b) Trouver les coordonnées du point G.

4/ a) Montrer que les points B, G et D sont alignés.

b) Exprimer $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$.

5/ La parallèle à (AB) passant par G coupe (BC) en L : Evaluer le rapport $\frac{\overline{BL}}{\overline{BC}}$

Déterminer les coordonnées du point L.

## Les évaluations proposées par P1 :Année 2

### Exercice 1

Soit les deux équations de premier degré à deux inconnues:

$(E_1): 5x - y + 2 = 0$ $\qquad$ $(E_2): x + \frac{1}{2}y - 1 = 0.$

1/ Indiquer parmi les couples suivants ceux qui sont solutions de $(E_1)$. $(-5,5)$; $(-2,-8)$

2/ Trouver deux couples solutions de l'équation $(E_2)$.

3/ Représenter graphiquement sur un même repère cartésien $(o, \vec{oI}, \vec{oJ})$ les droites:

$D_1: 5x - y + 2 = 0$ $\qquad$ et $\qquad$ $D_2: x + \frac{1}{2}y - 1 = 0.$

4/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $D_1$ et $D_2$ graphiquement par le calcul.

6/ Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants:

$\begin{cases} x\sqrt{2} + y = -\sqrt{2} \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 4 \\ 3x^2 + 5y^2 - 1 = 28 \end{cases}$.

### EXERCICE 2

Soit Δ une droite munie d'un repère $(o, \vec{oI})$. Soit A et B les points de Δ d'abscisses respectives (-2) et (3).

1) Soit G le point de Δ vérifiant $\overline{GA} - 3\overline{GB} = 0$. Trouver l'abscisse de G puis pl G.
2) Soit M le point de Δ d'abscisse négative tel que $2BM = 3BG$. Trouver l'absc de M.
3) Déterminer les abscisses des points O, A, B et G selon le repère $(0, \overline{BM})$

### EXERCICE 3

Soit $R = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan.

1) Placer les points $A(2, -1)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 1)$ et $K(\frac{15}{2}, 5)$ dans le repère R.
2) Montrer A, B et C sont non alignés.
3) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogram
4) Déterminer les coordonnées du point L milieu du segment $[AB]$.
5) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$
6) En déduire que les droites (BC) et (LK) sont parallèles.
7) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   a. Montrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
   b. Déterminer les coordonnées du point G.

Bon Courage

## Devoir à la maison proposé par P1 Année 2

*Exercice n°1 :*

1) Soit (O, I, J) un repère du plan, placer les points A (-1, 2) et B (0, 3)

2) Déterminer une équation du premier degré à deux inconnues x et y dont la représentation graphique des solutions est la droite (AB).

*Exercice n°2 :*

1) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

2) En déduire l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} |x+1| + \dfrac{1}{y} = 3 \\ 2|x+1| + \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases}$

*Exercice n°3 :*

Résoudre dans IR×IR, les équations suivantes :

1) $(x-y)^2 + (3x+2y-1)^2 = 0$ ; 2) $(3x-y)^2 - (x+2y)^2 = 0$

*Exercice n°4 :*

Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit m un paramètre réel. On considère le système, d'inconnues x et y,

$(S_m) : \begin{cases} mx + y = 2 - m \\ (7-m)x - my = -6 \end{cases}$

1) Résoudre dans $IR^2$ le système $(S_m)$ dans chacun des cas suivants :

a) m=0 ; b) m=-1.

2) On désigne par ( Δ ) et ( Δ ') les représentations graphiques, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, respectivement des équations : -x+y-3=0 , 8x+y+6=0.

a) Tracer ( Δ ) et ( Δ ').

b) Déterminer les coordonnés du point I intersection de ( Δ ) et ( Δ ').

3) Résoudre, dans $IR^2$, le système : $\begin{cases} -|x| + \dfrac{1}{y} = 3 \\ 8|x| + \dfrac{1}{y} = -6 \end{cases}$

4) Soit $f(x) = ax^3 + x^2 + b$.

Déterminer a et b sachant que : f(-1) =4 et f(2)= -2.

*Exercice n° 5 :*

11 Livres sont empilés les uns sur les autres, la hauteur de la pile est 45 cm. Dans cette pile il y a des livres d'épaisseur 5 cm et des livres d'épaisseur 3 cm.

Trouvez le nombre de livres de chaque sorte graphiquement puis par le calcul.

*Exercice n° 6 :*

L'aire d'un rectangle de périmètre 36 cm ne change pas si on diminue sa longueur de 4 m et on augmente sa largeur de 3 m.

Trouvez les dimensions du rectangle.

## Observation de P1/ 1/03/2007 de 9hà 10h : séance1

1. P : allez, vous prenez vos affaires et vous écrivez nouveau chapitre : « système de deux équations du premier degré à deux inconnues »
Les élèves prennent leur manuel et leurs cahiers, pendant ce temps l'enseignante, écrit au tableau
**I- Equation du premier degré à deux inconnues**
1) Activité 1 p233
2. P : vous lisez l'activité et vous commencez à travailler, vite..
Les élèves travaillent individuellement (5mn) et l'enseignante tourne dans les rangs en 3.bservant le travail des élèves.
4. P : bon on commence, qui veut lire ?
5. E : madame madame
6.P : oui, mourad
Mourad lit l'énoncé et la 1ère question de l'activité
7. P : quelqu'un au tableau
8. M : madame
9. E1 : oui imene , tu passes au tableau
10. P dicte à iméne qui écrit au tableau
Soient x et y les nombres qui apparaissent sur chaque face des deux dés alors
1) a- La relation entre x et y est définie par : x + y =6

11. P : bon la 2ème question qui répond ?
12. E : madame, madame…
13.P : oui mourad
14. E2: deux quatre
15. E3: cinq un
16. E4 : trois trois
Silence dans la classe
17. P : c'est tout, pas d'autres valeurs pour x et y
18. E4 : on peut prendre quatre deux madame mais c'est la même chose
19. P : non ce n'est pas pareil pour x et y, on va faire un tableau, passe sana
20. P : tu fais un tableau, on prend toutes les valeurs possibles pour x par exemple et on écrit les valeurs de y tel que la somme donne 6
Sana fait le tableau suivant, les élèves recopient sur leur cahier

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

21. P : combien de possibilités donc ?
22. E : cinq
23. P : on écrit donc les couples
P renvoie l'élève à sa place et écrit lui même au tableau en lisant le couple (x, y) appartient à l'ensembles des couples …
(x,y ) $\in$ *{(1,5); (2,4);(3,3);(4,2)(5,1)}*
24. p : on passe à la deuxième question qui lit ?
25. E : madame
26. P : oui amel
27. Amel lit l'énoncé de la deuxième question de l'activité
28. P : bon l'équation, on l'écrit, qui passe au tableau ?
29. E2 : madame
30. P : vas-y , vous écrivez
31. P dicte à E2 qui écrit au tableau
32. P : La relation entre x et y est x + y = 10
33. P : bon vous cherchez maintenant tous les couples qui vérifient cette relation
34. E4 : huit deux madame
35. P : c'est juste ?
36. E1 : c'est des dés madame, pas plus que 6
37. E3 : quatre six madame

38. P : oui on va écrire (il regarde l'élève au tableau)
39 .P : x+y = 10 donc y = 10 – x
40. p : combien de couples ?
41. E : trois madame
42. P : oui on écrit alors comme tout à l'heure le couple x,y appartient à l'ensemble..
L'élève au tableau écrit
$(x,y) \in \{(4,6)\,;(6,4)\,;(5,5)\}$
43.p : (sans écrire) les relations x+y = 6 et x+y = 10 sont des équations à deux inconnues et les ensembles qu'on vient de trouver sont les ensembles de solution de cette équations, ce sont des couples.
Bon, on passe à la 2ème activité, vous lisez et vous essayer de la faire.
Les élèves lisent l'énoncé, ils bavardent entre-eux (3mn), l'enseignante les interrompe
44. P : Allez vous lisez ensuite je vous laisserai le temps de terminer le reste, qui commence
45. E : madame
46. P : aymen tu lis et tu passes au tableau
47. P : d'abord, on écrit la relation du problème
L'élève lit l'énoncé et écris ce que p lui dicte (les élèves recopient)
Soit x le nombre de cassettes et y le nombre de CD alors
2,500 x + 15 y = 100
48. P : ensuite la 2ème question, si on a quatre cassettes, vous cherchez le nombre de CD, qui 49.passe ?
50. E : madame
51. P : qu'est ce qu'on fait ?
52. E : on cherche y madame
53. P : oui mais comment ?
54. E : on remplace dans la relation
55. P : bien passe au tableau Ikram
Ikram passe au tableau et accomplit seule la tâche, les élèves suivent et recopient sur leurs cahiers
$4\times 2,5 + 15\,y = 100$
$10 + 15\,y = 100$
$15\,y = 100 - 10$
$y = 90/15 = 6$
56.p : bien donc qu'est ce qu'on trouve
57. E : six CD
58. P : non mais la solution, c'est quoi ?
59 P : Bouhaaa
60. P : dans la relation 2,500 x + 15 y = 100 si x =4 alors y =6 donc.
61. E2 : le couple (4,6)
62. P : bien le couple (4,6) est solution de cette équation, c'est bien une équation à deux inconnues ? Pourquoi du premier degré ?
63. E : la puissance de x et y est 1
64. P : oui les exposants des inconnues x et y c'est 1, bon la question suivante, je vous laisse un peu de temps.
65. P : l'enseignant lit la troisième question de l'activité puis tourne dans les rangs pour observer le travail des élèves (il fait une remarque à certains élèves à propos de la relation : attention lisez bien est ce que c'est x= 1,5y ou y= 1,5x ?)
66. E : madame , comment on trouve x et y on n'a pas x ici
67. P : réfléchis, on t'a donné une relation entre x et y alors ?
68. E4 : ça ne donne pas x madame, seulement une équation à une inconnue y.
69. P : bon on va voir allez qui passe le faire au tableau ?
70. E6 : madame
71. P : Ichrak au tableau
72. E6 : écrit au tableau : 2,5 * (2y) + 15 y = 100

73. P : vous êtes d'accord ?
74. E : oui madame
75. P : mais il faut d'abord écrire que x = 2y , le nombre de cassettes est le double de celui de CD.

E6 rajoute la relation au tableau puis écrit
2,5x = 2(15y)
2,5x = 30 y

76. P : c'est quoi ça, vous remplacez, qu'est ce qu'on obtient ? Une équation comment ?
77. E : une équation du premier degré à une inconnue
78. P : bon, donc vous cherchez y

E6 efface ce qu'elle avait écrit et réécrit
2,5 ×(2y) + 15 y = 100
5y + 15 y = 100
20y = 100
y = 5

79.p : tu continues
80. E6: c'est tout madame on trouve y
81. E : il reste x
82. P : oui on vous demande le nombre de cassettes et le nombre de CD, comment vous faites ?
83. E3 : le nombre de cassettes est le double des CD donc dix
84. P : oui on remplace la valeur trouvée de y dans la relation (il montre au tableau), il faut pas oublier ce qu'on cherche !

E6 écrit au tableau
x = 2y sig x = 10

85. E1 : le couple (5,10) madame est solution
86.P : bien , vous pouvez l'écrire si vous voulez même si c'est pas demandé, on passe vite à la dernière question, c'est presque pareil , lisez

Un élève léve le doigt et l'enseignante l'autorise à lire la question

87. E : madame je passe au tableau ?
88. P : oui amel
89. E : le nombre de CD est une fois et demi le nombre de cassettes donc y = 1,5 x
90. P : bien tu continues
91. E : 2,5x + 15 (1.5x) = 100
92. P : vous êtes d'accord ?
93. E : oui c'est juste
94. E continue au tableau

2,5 x + 22,5 x = 100
25x = 100
x = 100/25
x = 4
y = 1,5x sig y = 6

95.p : bien bon, maintenant vous écrivez définition, elle se trouve dans votre manuel, je vais l'écrire au tableau, à ta place amel

**<u>Définition</u>**

*« L'équation a x +by +c = 0 ou a et b sont deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues, est appelée équation du premier degré à deux inconnues.*

*Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x, y) pour lesquels l'égalité est vraie. Chaque couple est appelé solution de l'équation »*

96. P : vous préparez l'activité 3 pour la prochaine fois.

## 5/03/2007 de 14h à 15h : séance 2

Cette séance correspond à la 2[ème] séance de p1 autours des équations du premier degré à deux inconnues. Au cours de la 1[ère] séance, les deux premières activités du manuel sont traitées suivies de la définition d'une équation du premier degré à deux inconnues.

1. P : la dernière fois on a écrit la définition, rappeler moi la définition

Un élève lit la définition énoncée dans le manuel.

2. P : bon maintenant on passe à la résolution.
3. P : qu'appelle-t-on équation du premier degré à deux inconnues
4. E2 : qui se met sous la forme ax+by +c=0 avec a et b non nuls à la fois
5. P : On va passer maintenant à la résolution graphique, lisez amel, l'énoncé, et essayez tous de faire l'activité 3.
6. E3 : on met activité 3 madame ?
7. P1 hoche la tête puis passe dans les rangs et observe le travail des élèves
8. E4 : madame j'ai appelé les nombres x et y
9. P : non tu dois suivre l'activité, on te dit m et n, c'est pas toujours x et y
10. E5 : la proportionnalité reste la même…

Après 7 minutes de travail individuel

11.P : bon on commence allez, on se propose de trouver deux nombres m et n ; Heithem tu passes au tableau

Heithem accomplit seul la tâche au tableau alors que p répond à un élève

1) m+n = (m-n)/3
2) m+n = m/3 –n/3 sig m – m/3 = -n –n/3

3m/3-m/3 = -4n/3

2m/3 = -4n/3

Sig n = 2/3m x -3/4 = -2/4m = -1/2m

n = -1/2

12. p: bien, la 2ème question
13. E2: m égal un donc n égal moins un demi

Heithem écrit au tableau

Si m=1, n= -1/2

14. P : on a dit choisir un couple, le couple …est solution de l'équation

Heithem écrit : le couple (1,-1/2) est solution de l'équation

15. P : est ce que vous avez tous choisi celui là ?
16. E1 : non moins deux quatre
17. P : non le couple (4,-2) regarde on a (m,n)

Heithem écrit au tableau

3 ) Le couple (3/5,11) ne répond pas au problème

si m=3/5

n= -1/2 x 3/5 = -3/10

n = -3/10 ≠ 11

18.E1 : madame toujours m = -2n si le couple répond à l'équation ? On fait m=-3/5 et on remplace on ne trouve pas 11.

19.P : oui on passe si n égal à trois

L'élève au tableau accomplit la tâche , les élèves adhérent en anticipant sur le résultat

4 ) n=3

m=3 donc 3= -1/2 m

m = 3x-2 = -6

m=-6

20. P : bon maintenant qu'est ce qu'on fait ?
21. E : madame un tableau
22. P : oui on prend des valeurs

Heithem dessine le tableau suivant et le remplit en collaboration avec les élèves de la classe

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| m | 3 | -6 | 0 | -2 | 5 |

| n | -15 | 3 | 0 | 1 | -2,5 |
|---|---|---|---|---|---|

23. P : la question c'est (il relit) qu'est ce qu'on remarque ?
24. E1 : fonction linéaire
25. P : quoi fonction linéaire ?
26. E : c'est une fonction linéaire, droite linéaire.
27. P : les points sont alignés
28. E4 : on peut inverser m et n ?
29. P : m abscisse, n ordonnée, regarde le couple qu'on t'a donné (m, n)

30.P : bon on va placer les points.

Heithem continue à tracer le repère au tableau, il place les points, les élèves suivent et effectuent la tâche à leur tour sur leur cahier.

31. P : on remarque que les points de coordonnées (x,y) sont alignés , ils appartiennent à la droite d'équation n= -1/2 m., on veut généraliser…
32. E1 : est ce qu'il faut que l'un s'écrit en fonction de l'autre pour que ce soit une droite ?
33. E2 : je n'ai pas compris madame la relation entre l'équation et le repère
34. P : on veut représenter l'ensemble des solutions (m,n) , qu'elle est l'équation, c'est n=-1/2m ou m= -2n , elles sont toutes équivalentes, on choisit quelques couples solution , est ce que le couple (2,-1) est solution ? E : oui.
35. P : comme on ne peut pas choisir une infinité de couples, on les représente dans un repère. Donc la représentation de l'ensemble des solution de m=-1/2n est une droite, cette équation est à deux inconnues
36. P : on peut la résoudre algébriquement.
37. E : SIR madame
38. E2 : On cherche quoi ?
39. E : des ensembles
40. P : non des couples, les couples (m,n) appartiennent à quoi ?

P écrit au tableau :

S= $\{(m,n),\ m \in \mathrm{IR},\ n \in \mathrm{IR}$ et $m + 2n = 0\}$

41. On peut également simplifier cette écriture

$S_{\mathrm{IR}\times\mathrm{IR}} = \{(m, -\frac{1}{2}m),\ m \in \mathrm{IR}\}$

Pour $\mathrm{IR}\times\mathrm{IR}$, c'est quoi exactement, c'est un ensemble de couples $\mathrm{IR}\times\mathrm{IR} = \{(x, y),\ x \in \mathrm{IR}, y \in \mathrm{IR}\}$

42. E: c'est quoi fois madame?
43. P : c'est pas fois mais c'est un produit cartésien d'ensemble, bon c'est une parenthèse, 44.voila un document qui explique cela

P distribue aux élèves le document (en annexe), il demande aux élèves de le lire et donne la parole à un élève.

45. P : vous voyez on écrit aussi $\mathrm{IR}^2$, ce n'est pas la multiplication mais c'est un ensemble de couples
46. P : bon maintenant si on vous dit résoudre graphiquement
47. E2 : on met les points dans le repère….
48. E3 ; on trace la droite
49. P : vous mettez exercice et vous commencez à résoudre

P propose aux élèves l'exercice suivant :

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes :

a) $x + y = 3$
b) $x - y = 5$
c) $x = 2$
d) $y - 1 = 0$

50. E2 : madame, on fait toujours un tableau ?
51. E3 : madame y=1, x= 2 sont des équations à une seule inconnue, comment on les représente ?
52. P : regarde bien c'est quoi a et b dans ces cas ?
53. P :! Bon faîtes la représentation dans le même repère, pour la prochaine séance vous faîtes aussi la situation 4 du manuel.

## Une autre classe de p1 , le 8/03/2007 de 15h à 16h : séance 3

1. P : on vous a dit de résoudre graphiquement, on va chercher tous les couples
2. P tourne dans les rangs pour observer le travail demandé aux élèves
3. P : alors, on commence, qui n'a pas compris d'abord ?, lisez tout d'abord
4. E madame, madame
5. P : manel va-y
6. Manel lit l'énoncé et p la fait passer au tableau

Elle écrit ce que p lui dicte :

1) on désigne par x et y les deux inconnues
2) Mise en équation :

$2(x+y) -3 = 3(x+y) + 2$

7. P : et par la suite ?

Manel effectue seule la transformation au tableau

8. P : on développe le tout ?
9. E2 : on peut le mettre en facteur
10. P : bon sans développer, bon continuez
11. E1 : x en fonction de y
12. P : ou y en fonction de x, c'est la même chose.

$2x + 2y -3 = 3x +3y +2$

$2x -3x -3y -2y +2 +3$

$-x-y = 5$

$-x = y + 5$

13. P: bon n va représenter l'ensemble des solutions, c'est-à-dire qu'est ce qu'on choisit ?
14. E : des couples
15. P : deux sont suffisants pour la représentation, on peut dresser un petit tableau de valeurs
16. P : de préférence on choisit y en fonction de x bon allez y

Manel réalise cela au tableau en collaboration avec les élèves de la classe

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | -5 |
| y | -5 | -6 | |

17. p : dans le repère (o, i, j), on place les points de coordonnées (x,y)
18. E2 : non c'est (y,x) si c'est une fonction affine
19. P : c'est pas un problème, ça dépend du choix des inconnues (a,b) a sur l'axe (ox) et b sur l'axe (oy)
20. E3 : si c'est une équation , on choisit y en fonction de x
21. P : bon on peut changer (il modifie au tableau et écrit $y = -x-5$)
22. P : qui n'a pas fait la situation ?
23. E5 : moi je n'ai pas compris, j'ai pas fait
24. P : bon tu suis alors
25. E1 continue à tracer au tableau les axes en les graduant
26. P : même unité de préférence ; bon 0 ; -5, qu'est ce qu'on fait par la suite ?
27. E : les points de coordonnées sont solution
28. P : oui on interprète cela , une fois qu'on a tracé qu'est ce que ça représente la droite ?
29. E : les solutions
30. E : une équation
31. E : l'ensemble des solutions
32. P : bon que peut-on dire des coordonnées des points de la droite ?
33. E : vérifient $x = -y-5$
34. P : donc (p dicte à manel au tableau) l'ensemble des solutions de l'équation $x = -y -5$ est la droite $\Delta$ , son équation cartésienne est $x+y+5=0$ ? y a t-il des questions ?

35. E5 : est ce qu'on écrit madame SIR ?
36. P : puisque c'est demandé graphiquement, on peut ne pas l'écrire mais bon on peut écrire (il écrit au tableau
S= {(x, -x-5), x ∈ IR} ou bien S= {(-y-5, y) y ∈ IR}
37. P : C'est une notation tout simplement mais on vient de représenter tous les couples solutions
38. E : dans IR ?
39. P : des couples de réels donc dans IR×IR, on va plutôt écrire S $_{IR\times IR}$., on a déjà expliqué cette notation la dernière fois.
40. P : à ta place Manel , vous allez faire l'exercice suivant

Exercice

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations

a) $x+y=3$
b) $x-y=5$
c) $x=2$
d) $y-1=0$

41. p : chacune à part
42. E2 : la droite passant par (2,0) parallèle à l'axe
43. P : tu commence par le troisième cas , bon pourquoi y c'est 0 ?
44. E : parce qu'il n'y a pas y dans l'équation
45. P : est ce que c'est une équation du premier degré à deux inconnues ?
46. E : non à une inconnue
P écrit au tableau ax+ by = c
x= 2
Donc a= 1 , b=0 et c=2
47. p : regardez x=2 s'écrit x + 0y = 2
48. P : alors les solutions de cette équation à deux inconnues ?
Bouhaaa… p écrit le résultat au tableau
S= {(2, y), y € IR}
49. P : quelqu'un au tableau
50. E3 : madame
51. P : passe Iméne
52. E1 : madame , c'est une équation à une inconnue pas à deux , on a seulement x
53. P : non y est la variable et x =2 est la constante ici
54. E :Bouhaaa…..
55. E3 : madame j'écris S seulement ou S $_{IRXIR}$
56. p : c'est des détails alors trace le repère
57. E5 : alors madame comment on répond S ou quoi ?
58. P : vous écrivez l'ensemble des solutions est la droite Δ et vous écrivez son équation
59. E4 : comment on représente une équation à une inconnue ?
60. P : bon écoutez on cherche plusieurs couples , on représente les points de coordonnées (x,y) , y est ici quelconque, le droite formée par ces points est la solution
Iméne trace le tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 2 | 2 | 2 |
| y | | | |

Et interroge je prend y comment ?
(P : y est quelconque, elle reprend le tableau et fixe des valeurs arbitraires elle ne semble pas convaincue de la réponse de p)

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 2 | 2 | 2 |
| y | 2 | 3 | 0 |

Elle place les points puis écrit ce que p lui dicte
L'ensemble des solutions de l'équation x = 2 est la droite passant par A (2,2) et parallèle à l'axe des ordonnées.
61. P : bon pour l'exemple d) : y – 1 = 0
62. P : Si vous tracez l'ensemble { (x, 1), x € IR}, vous allez trouver quoi ?
63. E : une droite
64. P : parallèle à quoi ?

65. E : à l'axe des abscisses
E écrit au tableau
y = 1
66.P :C'est de la forme ax + by = 1
Avec a =0 ; et b =1
$S_{IR2}$ = {(x, 1), x € IR} si on le représente alors c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
67 .E1 : dans ce cas y est constante ?
68. P : oui c'est ça et x est la variable
69. Iméne trace la droite passant par les points (2,1) et (1,1)
70. P : pour les autres vous avez tracé seul ? C'est facile
71. E : oui
72. P : iméne à ta place
73. p écrit au tableau D : y-1 = 0
74. p : pour les deux premiers cas …
75. E : c'est la même chose madame on prend un tableau de valeurs et on trace
76. P : bon donc on passe à la 2ème partie de la leçon, vous écrivez système de deux équations du premier degré à deux inconnues
<u>II- système de deux équations du premier degré à deux inconnues</u>
**Activité 4 p 229**
77. P : vous lisez tout d'abord l'activité, les élèves lèvent le doigt pour lire, p envoie un élève (amine) au tableau après 2minutes
78. P : met d'abord premièrement mise en équation
79. Amine écrit les équations 3N = R -3 et 4N = R + 4
80. Amine : Donc 4N = 3N +3 + 4
E madame, on cherche R dans la 1ère et dans la 2ème ensuite on fait l'égalité
81. P : bon
82. E2 : écrit au tableau 4N -3N = 7
N = 7
On a 3x7 = R -3
Sig 21 = R -3
D'ou alors R = 21 + 3
= 24
$S_{IR2}$ = {(7, 24)}
83. P : bon, c'est bien , d'une autre façon, chacun de vous essaye tout seul
84. E : madame la question c'est R et N
85. P écrit au tableau (R, N) = (24, 7) : on n'est pas obligé d'écrire l'ensemble des solutions mais juste R égal et N égal, les autres méthodes ?
87. E6 : graphiquement madame par l'intersection des deux droites
88. P : ce n'est pas demandé par le graphique, réfléchissez pour la séance prochaine.

**Le 12/04/2007 de 14h à 15h : séance 4**

1. P1 écrit au tableau
Activité 4p 229
3N = R -3 (1)
4N = R + 4(2)
2. P1 : silence silence, sachant que …, bon on va terminer l'activité, bon pour la méthode de résolution, on cherche R et N qui vérifient en même temps
3. E1 : par exemple, on cherche N et on remplace dans la 2ème
4. P : oui on exprime par exemple R en fonction de N et on remplace dans la 2ème
5. P prend à sa charge la résolution du problème au tableau
6 R= 3N +3
4N = 3N +3 +4 équivaut
N= 7

D'où R= 3x7+3
= 24
(N, R) = (7,24)
(7,24) est solution des équations (1) et (2) en même temps.
7. E2: madame, on met S $IR^2$
8. P écrit au tableau:
Le couple (7,24) est solution du système d'équations

$$\begin{cases} 3N = R - 3 \ (1) \\ 4N = R + 4(2) \end{cases}$$

9. P : par définition qu'appelle-t-on donc système de deux équations à deux inconnues
10. E :Bouhaaa
11. P : bon c'est la donnée de deux équations, regardez la page 229, c'est écrit : définition lisez et recopier là sur votre cahier
Aussitôt elle écrit :

**II- Méthodes de résolution d'un système du premier degré à deux inconnues**

**<u>Activité 5 :</u>**

12. P : allez faîtes l'activité 5, vous lisez jaouani
Jaouani lit l'énoncé
13. E2 : comment madame..
14. P : réfléchissez, mettez le problème en équations
15. E3 : comment à chacun d'eux ?
16. P passe dans les rangs et observe le travail des élèves voici quelques propositions évoquées oralement

$$\begin{cases} m+n = 96 \\ m= 2(n+78) \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = 96 \\ 2a = (b+78) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 96 \\ (x+78) = (y + 78)\ x \end{cases}$$

p fait passer un élève au tableau qui écrit

$$\begin{cases} m+n = 96 \\ m+ 78= 2(n+78) \end{cases}$$

17. p: suivez les étapes de l'activité
18. E3 : madame j'ai pas fait ça avec la 2ème est ce que c'est la même chose ?
19. E4 : non
20. P : quoi non, il faut le faire
21. E3 : j'ai écrit n+78 = 2( m+78) ; je ne trouve pas le même couple .
22. P : silence, écoutez, 2ème étape écrivez
L'élève au tableau poursuit la résolution par des écritures séparées

$$\begin{cases} m= 96 - n \\ 96 - n + 78 = 2n + 156 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m= 96 - n \\ 3n = 78 + 96 - 156 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m= 96 - n \\ 3n = 18 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m= 96 - n \\ N = 6 \end{cases}$$

Sig

$$\begin{cases} m=90 \\ n=6 \end{cases}$$

Donc $S_{IR}{}^2$ = (90,6)
(Un élève appelle p et résout autrement l'exercice mais l'enseignant exige qu'il suive les étapes indiquées dans l'activité)
23. P revient ensuite sur le travail de l'élève au tableau, il rectifie les écritures et explique la méthode et écrit au tableau :
Cette méthode est appelée méthode par substitution.

24. P : K bair a une $2^{ème}$ méthode pour résoudre le système, allez au tableau
(kbair passe au tableau et se met à écrire ce qui suit :

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ m + 78 = 2(n + 78) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + n = 96 \\ m + 78 - 2n - 156 = 0 \end{cases}$$

25.p intervient et écrit
Équivalent à

$$\begin{cases} m + n = 96 \\ m - 2n = 78 \end{cases}$$

26. kbair : je multiplie par -1 ensuite je fais l'addition
27. P : d'accord mais rajoute équivalent à

$$(-1)\times\begin{cases} - m - n = - 96 \\ m - 2n = 78 \end{cases}$$

28. E : bouhaha...
29. P: arrêtez suivez
30. P écrit lui-même au tableau
31. On additionne membre à membre les deux équations
32. Kbair : j'ai fait ça madame
il écrit

$$\begin{cases} - m = - 96 \\ - 2n = 78 \end{cases}$$

33. P : attendez n'écrivez pas, on a dit on va faire l'addition (il efface et réécrit)

$$\begin{cases} -3n = -18 \text{ donc } n = 6 \\ m = 96 - n = 96 - 6 = 90 \end{cases}$$

34. p : bon on va suivre méthode par méthode au moins pour connaître les appellations, lorsqu'on multiplie, attention n'oubliez pas de multiplier le $1^{er}$ membre et le $2^{ème}$ pour obtenir une équation équivalente, cette méthode de résolution est appelé&e méthode par élimination (il l'écrit au tableau)

35. p : bon est ce que ce sont les seules méthodes ?
36. Nesrine : non madame, on peut chercher m dans les deux
37. P : Nesrine va-y au tableau
Nesrine écrit seule au tableau et p suit avec les élèves sans intervenir

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ m = 2(n + 78) - 78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ m = 2(n + 78) - 78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96 - n = 2n + 78 \\ m = 96 - n \end{cases}$$

38. E3 : Nesrine tu l'as fais comme ça toute seule ?
39. E : hahaha..
40. P : shut vous suivez les autres
Nesrine continue à écrire

$$\begin{cases} 3\ n = 96 - 78 \\ m = 96 - n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 6 \\ m = 96 - 6 = 90 \end{cases}$$

41. p : c'est bien, cette méthode est appelée par égalisation, elle ne figure pas dans votre livre 42.mais on peut l'utiliser
43. E1 : égalité égalisation ça ressemble à la substitution madame.
44.P : pas tout à fait , vous exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans les deux équations et puis vous égalisez, on obtient une équation à une inconnue et là vous continuez comme pour les autres méthodes ,bon regardez l'exercice 1 p 237 comme application
45.E : madame madame

46.P : attendez faites le d'abord
47.P écrit au tableau :
**Exercice 1 p237**
Résoudre chacun des systèmes
$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -4x + y = -6 \end{cases}$
Les élèves sont en train de résoudre (3minutes)
48.P : allez chaima au tableau
49.E6 : madame je n'ai pas compris la différence entre égalisation et substitution
50.P : c'est pas un problème, suivez votre camarade, elle va appliquer la méthode du livre
Chaima passe au tableau et écrit
$x = 5/3 + y/3$
$-4(5/3 + y/3) + y = -6$
Sig $x = 5/3 + y/3$
$-20/3 + -4/3y + y = -6$
Sig $x = 5/3 + y/3$
$20/3 - y/83 = -6$
$x = 5/3 + y/3$
$y/3 = -20/3 - 6$

$x = 5/3 + y/3$
$y/3 = -2/3$

$y = -2$
$x = 5/3$

$x = 5/3 + y/3$
x= …
51. p : oui tu remplaces maintenant y par -2
$x = 5/3 + -2/3 = 1$
x= …

52.p : C'est à dire $S_{IR^2}$ l'ensemble formé par le couple (1,-2)

53.E2 : c'est long madame
54.P : il faut réfléchir qu'elle est la méthode qui donne le résultat plus rapidement et plus facilement.
P écrit au tableau
$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -4x + y = -6 \end{cases}$
55.P :On additionne membre à membre et on obtient
$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -x = -1 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} 3-y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$
56. P : oui on peut aussi exprimer y dans les deux pour utiliser l'égalisation, pour la prochaine fois à faire les exercices 1 p 237 et 11 p 230
57. E2 : tout l'exercice c'est trop de calcul madame
58. P : attendez, ce n'est pas encore terminé, vous avez aussi ce devoir à la maison à faire sur double feuille pour la semaine prochaine.

**Document distribué par P1 : Année 2 (Séance 1)**

**Notion de couple**

1/ Chacun des quatre étages numérotés 1, 2, 3,4 d'un immeuble est formé de trois appartements numérotés 1, 2,3 pour désigner un appartement de cet immeuble, on indique d'abord le numéro de l'étage puis le numéro de l'appartement. Par exemple, l'appartement numéro 3 du $2^{ème}$ étage est désigné par l'écriture (2,3).

* Quels appartements désignent les écritures (1,3) ; (3,1) ; (4,3) ; (2,2)

* (1,3) et (3,1) désignent-ils un même appartement de cet immeuble ?

* (1,3) ;(3,1) ; (4 ,3) (2 ,2) sont des couples.

Plus généralement

a et b désignent deux objets quelconque, l'écriture (a,b) représente un couple.

a est son premier terme, b est son deuxième terme

2/ * Ecrivez l'ensemble de tous les couples qui désignent les appartements de cet immeuble

* Soient E l'ensemble des numéros des étages et A l'ensemble des numéros des appartements de chaque étage.

$E = \{1, 2, 3,4\}$ ; $A = \{1, 2,3\}$

L'ensemble des couples que vous venez de déterminer s'appelle

**Le produit cartésien de l'ensemble E par l'ensemble A**

On le note : $E\times A$ et on lit « E croix A » ainsi

$E\times A = \{ (1,1) ;(1,2) ;(1,3) ;(2,1) ; (2,2) ; (2,3) ; (3,1) ; (3,2) ; (3,3) ; (4,1) ; (4,2) ; (4,3)\}$

Plus généralement

A et B étant deux ensembles, le produit cartésien de A par B, noté $A\times B$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que x appartient à A et y appartient à B

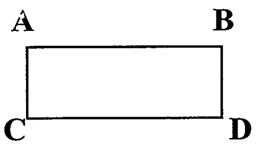
On note $A\times B = \{(x, y) ; x \in A \text{ et } y \in B\}$.

**Observation du 23 Avril 2006 du professeur $P_2$ : séance 1**

1. P : vous écrivez le titre du nouveau chapitre et l'activité suivante
(P écrit au tableau en lisant l'énoncé)
Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
I- Equation du 1$^{er}$ degré à deux inconnues
1) <u>Activité</u>
Quatre joueurs A,B,C, D se déplacent sur un terrain en essayant de former un rectangle de périmètre 100m

a) Que peuvent être les valeurs des distances AB entre A et B d'une part et BC entre B et C d'autre part.
b) Si on pose x = AB et y= BC, quelle relation doit vérifier x et y ?

2. P : alors je reprends, voilà la première question… et la 2éme on y reviendra, alors je vous donne quelques moments de réflexion pour me donner quelques possibilités.
Pendant ce temps p construit à la règle et au compas un rectangle ABCD.




3. E1: 100métres madame ?
4. P : oui le périmètre doit être égal à 100m
5. P : c'est quoi le périmètre d'abord d'un rectangle avant de passer ?
6. E1 : deux fois la longueur plus deux fois la largeur
7. P : tout le monde est d'accord ? Votre camarade vous dit le périmètre d'un rectangle 8.d'une manière générale c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
9. E : oui
10. P : avec ce qu'elle vient de vous donner essayez de trouver des valeurs de manière à obtenir ABCD de périmètre 100m, envisagez quelques possibilités pour la distance AB et la distance BC.
11. P : alors je vais commencer, je vais écrire sous forme de tableau
P trace le tableau

| AB | BC |
|---|---|
| | |

12.E2 : 30 et20
13. P: qu'est ce que tu proposes? Bon voyons $30\times2+20\times2=60+40=100$ donc ce sont deux valeurs qui sont convenables, d'autres possibilités
14.E1 : AB15 et BC 35
15. P: pourquoi?
16. E1: AB $\times 2 = 30$ et $35 \times 2 = 70$, $30+70=100$
17. P: c'est bel et bien 100
18. E4 : non c'est faux madame
19. E2 : faux la longueur, la hauteur oh la largeur 15
20. P : alors là vous avez dans votre esprit ce rectangle là (en montrant du doigt) mais le rectangle pour chaque valeur que vous prenez vous obtenez un nouveau rectangle, ou la longueur pour vous devient largeur et la largeur devient longueur et puis après on verra un cas particulier, on va y revenir avec vos possibilités, est ce que vous avez compris ce que je viens de dire ?
(le silence règne alors p reprend)
21.p : à chaque fois que vous prenez une valeur de AB et une valeur de BC peu 22.importe laquelle est la longueur laquelle est la largeur l'essentiel c'est d'obtenir un rectangle de côtés AB et BC tout en vérifiant le périmètre égal 100

23. E5 : 40 et 10, 40x2 +10x2 = 80 +20 =100
Oui c'est vrai parce que ça vérifie bien, d'autres possibilités ?combien y a t-il de possibilités ?
24. E : beaucoup
25. E1 : éternité
26. P : une infinité, y a t-il une possibilité particulière qui attire l'attention ?
27. E : AB égal BC
28. P: oui combien ?
30. E3 : 25
31. P : on obtient donc un ...
32. E : carré
33. P : mais votre carré a ses deux côtés consécutifs égaux, c'est un carré mais comme même un carré c'est un rectangle, c'est donc une possibilité à envisager, , on passe maintenant on écrira
34.P écrit tableau

| AB(m) | BC(m) |
|---|---|
| 30 | 20 |
| 15 | 25 |
| 40 | 10 |
| 25 | 25 |

Il existe une infinité de possibilités pour lesquelles le périmètre de ABCD est 100m.
35. P : bien sûr les distances AB et BC en mètres et la somme de qui ?
36. E1 : de AB et BC égal 50
37. P : la somme égal 50 tu viens de dire 50 !
38. E1 : on ne peut pas dire qu'il existe une infinité
39. P : est ce que vous avez entendu votre camarade, l vient de dire 2 fois AB plus 40.2fois BC égal 100 veut dire AB plus BC égal 50, vrai ou non ?
41. E : oui
42. P : dans ce cas là, si AB plus BC égal 50, les possibilités sont bien
43. E1 : limités
44. P : limités oui mais peux tu déterminer le nombre de possibilités ?
45. E1 : non
46. P : sachant que AB plus BC égal 50 peux tu déterminer le nombre de valeurs ?
47. E6 : une
48. P : alors à chaque valeur comment tu fais pour trouver AB et BC ?par exemple je prendrai Mohamed, comment tu as trouvé les valeurs 30 et 20, qu'est ce que tu as fait pour les trouver ?
49. P : tu as pris ...
50. E2 : la longueur du rectangle fois2 et BC 20x2
51. E5 : on peut prendre madame deux nombres qui sont égaux à 50
52. P : leur somme égale à 50 mais vos choix comment vous le faites ? Vous tâtonnez comme ça (en balançant les bras) ?
53. E : non...
54. P : est ce que vous prenez AB égal 30 puis je te pose la question à quoi doit être égal BC dans ce cas là, comment vous faites pour trouver AB et BC ?
55. E9 : les deux égal à 50
56. E4 : le périmètre égal (AB+BC) x2 = 100 donc AB+BC il faut qu'il soit égal 50
57. P : oui et alors comment tu donnes tes possibilités ? Comment tu les choisis ?est ce que tu les prends e même temps ou l'un après l'autre ?
58. E2 : l'un après l'autre
59. P : bien tu choisis l'un après l'autre
60. E2 : AB =30, 30x2 = 60, le périmétre100-60 =40 donc BC 40/2 égal 20

61. P : pour déterminer vos possibilités vous posez une valeur pour l'un et vous déterminez l'autre en calculant en utilisant x pardon en prenant 2 AB +2BC=100
Ou AB+BC= 50ou encore (AB +BC) x2 = 100.
62. P : y a t-il des valeurs qu'on ne peut prendre
63. E3 : oui zéro
64.P : oui ce sont les valeurs ..., de toute manière l'ensemble des possibilités c'est limité comme vous avez dit mais ça n'empêche qu'il y en a beaucoup
65. P : nous passons donc à la 2éme question, si on pose x égal AB et y égal BC qu'elle relation doit vérifier x et y pour toujours obtenir un périmètre égal 100
66. E1: on a x + y = 50
67. E2: (x+y) x2 = 100
68. P : oui d'autres relations ?
69. E5 : x* 2 +y*2 = 100
70. P : toutes ces relations expriment le périmètre du rectangle 10 ce sont donc des relations dites équivalentes elles sont toutes équivalentes on va choisir, qu'est ce que vous choisissez ?
71.P écrit au tableau :
b) x = AB, y= BC
la relation que doivent vérifier x et y est : x+ y =50
72. p : bien continuons, vous avez terminé ?
73. E : oui
74. P : bien cette relation x+ y =50 est une relation d'égalité, somme de x et y égal 50, alors vous avez dans cette relation combien de réels à déterminer ?
75. E : deux
76. P : lesquels ?
77. E x et y
78. P : donc ces réels on les appelle...
79. E : inconnues
80. P : bien x et y sont des inconnues de cette relation d'égalité, donc elle est appelée équation du 1$^{er}$ degré à deux inconnues x et y.
81. P écrit au tableau
Cette relation entre x et y s'appelle équation du 1ér degré à deux inconnues
82. P : alors reprenons maintenant la 1ére question, le tableau, x pour vous c'est quoi ?
83. E : AB
84. P : et y ?
85. P : BC
86. P : Bien alors pour le 1ér cas on a x =30 et y = 20 , ces deux réels en même temps si je les remplace dans cette relation est ce qu'ils vérifient cette relation ?
87. E : oui
88. P : alors puisque 30 et 20 en même temps vérifient l'équation on dira (écrit cela au tableau) le couple (30,20) vérifie l'équation x+ y =50
89. p : citez d'autres couples vérifiant l'équation, arrêtez d'écrire, s'il vous plait citez d'autres couples qui vérifient l'équation x+ y =50.
90. E6 : 15,35
91. P : passe au tableau et écris ce que tu exprimes
92. E6 passe et écrit : le couple (15, 35) vérifie l'équation x+y = 50
93. P : bien d'autres couples..
94. E9 : 40,10
95. P : passe au tableau
96. E9 passe et écrit : le couple (40, 10) vérifie l'équation x+y = 50
97. P : voyons, bien, y en a t-il d'autres ?
98. E : (5,45), (25,25), (48,2)

99. P : d'accord moi je vous donne un couple, je prend le couple, laissez moi c'est mon tour de choisir ,je prend le couple (22,34)
100. E4 : 56 madame
101.P : quoi 56
102. E3 : n'égal pas 50
103. P : alors on dira que le couple (22,34) ne vérifie pas l'équation, les couple cités, il y en a d'autres sont solutions de l'équation x+y = 50
104. P efface le tableau et écrit : Les couples (30,20), (15,35), …qui vérifient l'équation x+y = 50 s'appellent solutions de celle-ci.
105. E1 : définition madame ?
106. P : on va donner après dans le cas général ,on est parti pour défini une équation , alors on va généralise maintenant
107. P : qu'est ce qu'une équation ?
108. E5 : chaque couple est appelé solution de l'équation
109. P : ça c'est pour l'équation mais qu'est ce que une équation en regardant 110.l'activité, oui ?
111. E3 : une équation à deux inconnues contient deux inconnues
112. P : c'est quoi d'abord ? C'est une…
113. E1 : relation
114. P : oui relation entre deux inconnues x et y alors vous écrivez
P écrit :
2) plus généralement
a, b et c étant 3réels tels que a et b ne sont pas nuls à la fois : On appelle équation du premier degré à deux inconnues toute relation se ramenant à la forme ax +by = c .
115. E2 : qu'est ce qu ça veut dire nuls à la fois madame.
116. E1 : n'égale pas à zéro
117. P : o a dit ne sont pas nuls à la fois
118. E1 : ne sont pas égaux à zéro
119. E4 : à la fois
120. P : oui à la fois
121. E3 : quand a égal b n'égal pas zéro, et quand b égal zéro , a n'égal pas zéro
122. P : vous avez compris ?, je reprends
P écrit : Alors l'ensemble des couples de réels (x,y) vérifiant ax + by = c s'appelle solution de cette équation.
3) Application
a) On considère l'équation 3x –y = 5
123. P : pouvez vous me donner quelques solutions
124 .8 : (2,1)
125. P : est ce que tu as réfléchi d'abord ?
126. E8 : oui 3x2=6-1=5
127. P écrit en répétant : (2,1) vérifie l'équation en effet 3x2 –1 6-1 = 5 donc (2,1) est solution de cette équation
128. E1 : (3,4)
129. P : oui le couple (3,4) est aussi solution
130. P : (1,7) est-il solution ?
131E : non
132..P : pourquoi ?
133. E7 : parce que égal –5
134. P : qui égal à –5
135. E7 : n'est pas égal à 5
136. P : je n'ai pas compris qui n'est pas égal à 5 ?
137. E1 le couple (1,7) ne vérifie pas l'équation.
138. P : je n'ai toujours pas compris qui n'est pas égal à 5 ?
139. E7 : parce que x est inférieur à y
140. P : c'est ça la raison ? votre camarade a dit parce que x est inférieur y , comment tu as compris cela ?
141. E7 : 5 est supérieur à 3x –y
142. P : mais moi je t'ai écris 3x –y = 5
143. E7 : 5 plus y égal 3x

144. P : mais toujours étant comment avoir qui est égal qui n'est pas égal à 5 ?
145. E7 : madame on remplace 3x1 –7
146. P (s'adressant àE7): que tu as découvert, est ce que tu as compris, pour qu'on puisse savoir si c'est solution , il faut en remplaçant x par 1 et y par 7 si on trouve 5 , si je ne trouve pas 5 ce n'est pas solution.
147. P : bon on termine le reste la prochaine séance.

**Observation du 30 Avril 2006 du professeur $P_2$ : séance 2**

1. P : Allez on commence, qu'a-t-on fait la dernière séance, qu'est ce qu'on a fait précisément ?
2. E1 : le couple (a,b) est solution d'une équation, par exemple 3x+y=7 ça veut dire 3a+b=7
3. P : reprend
4. E1 : le couple (a,b) est solution de l'équation 3x+y=7 équivalent 3a+b=7
5. P : qu'as-tu dis ? tu as remplacé (x,y) par (a,b)
6. E1 : oui
7. P : c'est une équation du premier degré à deux inconnues
P écrit au tableau
ax+by =c est une équation du premier degré à deux inconnues réels x et y
8 : P : est ce que x et y sont des réels donnés ?
9:E : non, des inconnues
10 .P : a, b, c sont des réels non nuls à la fois
11. P : je vous ai demandé de donner quelques couples solutions de l'équation 3x+y=5, je vous ai demandé comment vous faites pour choisir vos couples ? Est ce que vous tâtonnez ? Ou vous choisissez x et y
12. E2 : non, on choisit x puis on cherche y
13. P : moi j'affirme que le couple (-1,4) est solution, qu'est ce que, vous dites ?
14. E : ahhhh
15. P : on remplace
16. E0 : 3fois -1 -4 égal -3-4 égal-7 différent de 5
17. P : d'accord dons (-1,4) n'est pas solution, je vais continuer avec la même application et une deuxième question je vous dis les couples (m,-1) et (3,n) sont solution de l'équation 3x-y = 5, calculer m et n
18. E3 : 3m+1=5
19. P : vous allez résoudre par la suite , le couple (m,-1) est solution de 3x-y =5 d'abord la signification de cet énoncé ? Que signifie le couple (m,-1) est solution de 3x-y=5
20. E3 : 3x-(-1) = 5
21. P : je reprends le couple (m,-1) est solution de 3x-y=5
22. E3 : 3x-(-1) =5
23. P : qu'est ce que tu as fais toi, tu as remplacé x par m
24. E3 : oui
25. P : alors reprend
26. E3 : 3m-(-1) =5 ça veut dire 3m+1 =5
27. P : c'est une équation à deux inconnues
28.P écrit au tableau :
3m-(-1) =5 équivaut à
3m+1= 5 équivaut à
3m= 5-1 équivaut à
3m=4 équivaut à
m = 4/3
29.p : alors maintenant le couple (3,n)
30. E0 : madame
31. P : passe au tableau
32. E0 écrit au tableau :
33. Le couple (3,n) est solution de 3x –y = 5 équivaut à

$3\times3 - n = 5$
34. P : j'ai rien entendu, parle plus fort
35.E0 : répète ce qu'il a écrit au tableau :
$3\times3 - n = 5$ équivaut à
9-n = 5 équivaut à
n = 5 -9 équivaut à
n = -4
36. p : est ce que vous êtes d'accord ?
37. E : bahhhh
38. p : bon pour être sur de son calcul, nous allons vérifier si ce couple est solution
39. p écrit au tableau, vérifions si (3,-4) est solution de 3x –y =5
40. E : faux madame
41. P : alors vérifiez
42. P et E : $3\times3 -(-4) = 9+4=13$
43. P l'écrit au tableau
44. P : voyons qu'elle est la faute
45. E : 9 – n= 5
46. P : donc –n = 5 -9 serait égal, nous allons faire la correction donc le couple (3,-4) n'est pas solution de 3x-y =5
P écrit au tableau :
47.P :Correction de l'erreur :
9 – n= 5 équivaut à –n = 5 – 9
Équivaut à –n = -4
Équivaut à n = 4
48. E : on écrit ça madame ?
49. P : oui parce qu'on a écrit correction
50.p : nous allons passer deuxièmement à activité 2, p écrit : Soit l'équation 2 x + y = 3
1) Citez quelques couples solutions de l'équation 2x+y = 3
2) Représentez ces couples dans un repère (o, i, j) , que remarquez vous ?
3) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation 2x +y = 3 complétez S ={(x, ...), x $\in$ IR }
4) Soit f : IR→IR
x→ -2x + 3
Tracez dans le même repère (o,i,j) la représentation graphique D de f,Que remarquez-vous ?
51. P : dépêchez-vous ?
1mn de réflexion, p relit l'énoncé
52. P:dépêchez vous, et bien on commence, alors on suit, citez quelques couples qui soient solution, à vous de répondre
53. E : madame, madame,
54. P : vous voulez faire un tableau ?
55. E : non madame
56. E1 : (2,-1)
57. P : (2,-1) vérifie 2*2 – 1 = 3 alors chacun de vous donne un couple, est ce que tu as réfléchi ? ou c'est au hasard ?
58. E1: c'est facile
59.E2 : Madame, (4,-5)
60. P: tu as réfléchi? Vérifions 4*2-1=3 bien
61. E5: (3,-3)
62. P: oui
63. E4: (1,1)
64. E2: (2,-3) madame
65. P : on se pose la question on a
66. E6 : madame (9,-15)
67. P : (9,-15) tu as réfléchi,
68. E6 : oui madame
69. P : bien, donc vous pouvez donner une infinité de couples solution, on passe nous allons
70. E : représenter les couples solutions
71. P : allez quelqu'un passe
72. E2: madame, madame

73. P: vas-y
74. E2 passe et trace deux droites sécantes puis commence à graduer les droites à l'aide du compas il place les points de coordonnées (0,3), (1,1), (2,-1)
75. P : (9,-15) c'est loin, mais les autres couples…
76. P : représentez vous aussi en même temps, pour ne pas perdre de temps vite
77. P : bien à ta place, bon bien sûr je peux placer une infinité de couples, on peut placer plusieurs couples, déjà il y a une infinité, qu'est ce qu'on remarque
78. E : fonction affine madame
79. P : attendez comment sont ces points ?
80. E : ohh
81. P : ils sont …
82. E0 : alignés madame
83. P écrit au tableau et lit :
84. P : En représentant les couples cités dans un repère (o,i,j), on a obtenu des points alignés,
85. P : on passe à la 3éme question, qui veut lire
86. E6 : madame…
87. P : est ce que c'est un ensemble de points ?
88. E :bouhhhh
89. P : vous avez vu les couples solution de l'équation, donc est ce que les solutions sont des points…levez vos têtes et suivez moi, écoutez la question 3
90. E : ensemble des couples
91. P : bien
92. E2 : fonction madame
93. P : regardez, l'ensemble des solutions de l'équation 2x + y = 3 a-t-on une fonction ici ? On a une équation…
94. P : l'ensemble des couples x,y et écrit au tableau :
S ={(x, -2x+3), x $\in$ IR } Car 2x+y = 3 équivaut à y = 3-2x
95. P : vous avez compris ?
96. E : non madame
97. P : je répète, comment vous avez trouvé le réel -1 pour le couple (2,-1)
98. E : on prend x=2 et on calcule y
99. P : et avec (4,-5), y= 3-2*4 = -5
100. E : bouahhh
101. P : donc l'ensemble des solutions est S (montre au tableau l'ensemble)
102. E0 : pourquoi on n'a pas remplacé -2x + 3 par y
103. P : je peux le faire en précisant la relation entre x et y, en écrivant x à l'aide de y ou encore y à l'aide de x vous pouvez poser y et chercher x dans ce cas là on exprime x à l'aide de y bon lisez la question suivante
104. P : vous parlez depuis tout à l'heure de fonction, qu'est ce que c'est ?
105. E : c'est une fonction affine
106. P : et la représentation graphique
107. E0 : c'est une droite
108. P : monte au tableau
109. E0 écrit au tableau :
f : IR→IR
x→ -2x+ 3
Soit x =1
f (1) = -2 * 1 + 3
= -2 +3 = 1
Soit x = 3
f (3) = -2 *3 +3
= -6 +3
= -3
110. P : continue : représentez, la question c'est représentez
111. E2 : on fait un tableau madame

112. P : bien
(E0 réalise au tableau la représentation graphique )
113.p : la représentation graphique on l'a appelé
114. E : droite
115. P : qu'est ce qu'on peut déduire ? la droite D...les couples représentés tout à l'heure, il y a une infinité, et on a dit qu'en représentant ces couples, les points sont alignés
Cette droite qu'est ce qu'elle a ?
La droite qui représente f , qu'est ce qu'elle a ?
116. E1 : la droite D contient les points de tout à l'heure
117. P : donc D passe par les points que nous avons trouvé, reprenons
118. p : D passe par les points qui représentent les couples de 2x + y = 3
119. P : trés vite écrivez, on remarque que la représentation graphique de qui ?
120. E0 écrit au tableau :
121. La représentation graphique de f passe par les points qui représentent les couples solutions de l'équation 2x + y = 3
121. P : et l'ensemble de solution
122. E2 : la fonction affine
123. P : je viens de trouver que la représentation graphique de f passe par les points solutions, 124.on déduit...
125. P conclut et écrit : On en déduit que la représentation graphique des solutions de l'équation 2 x + y = 3 est une droite.

**Observation du 4 mai 2006 de $P_2$ séance 3 de 10h à 11h**

1. P : on s'assoit maintenant et vous commencez rapidement à écrire en même temps que moi
II- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues
1) Activité

Dans une cage, il y a des poules et des lapins
1) Déterminer le nombre de poules et le nombre de lapins dans chacun des cas suivants
1^er^ cas : il y a 16 pattes
2^ème^ cas : il y a 6 têtes
3^ème^ cas : il y a 16 pattes et 6têtes à la fois
2) On désigne par x le nombre de lapins et par y le nombre de poules
2. P1 : Mettre le problème en équations dans chacun des cas envisagés.
3. P relit l'énoncé
4. P : sayez c'est fait
5. E : non madame
6. P : bon vous allez vous aider de tableaux
1er cas : 16 pattes 2éme cas : 6têtes

| L | P |
|---|---|
| | |

7. P : Vous donnez toutes les possibilités pour chaque cas, alors on commence ? je vous fais une remarque la cage contient des poules et des lapins
8. E1 : il y a 2 lapins et 4poules
9. P : vérifions si cette possibilité est vraie, un lapin a 4pattes et une poule a 2pattes
10. E2 : madame, 4x2=8 et 2x4=8 et 8+8 = 16
11. P : qui a compris ?
12. E3 : un lapin possède 4pattes et une poule a 2pattes
$4\times2+2\times4=8+8=16$
13. E4 : je n'ai pas compris madame
14. P : envisagez d'autres possibilités, quoi encore ?

15. E5 : nombre de lapins 3 et de poules 2, 3x4=12, 2x2=4, 12+4 = 16
16. P : qui possède une autre possibilité ?
17. E6 : 1 et 6, 1x4=4, 2x6=12 et 12+4 = 16

P écrit :

| L | p |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 3 | 2 |
| 1 | 6 |

18. E7 : 4lapins et pas de poules
19. P : non, on a dit qu'il y avait des lapins et des poules dans la cage
20. E7 : et si elles sont handicapées
21. E :hahaha…
22. P :Elles auront des pattes passons au $2^{ème}$ cas
23. E1 : 4lapins et 2poules
24. E2 : 1 lapin et 5poules
25. E3 : 2 lapins et 4poules
26. E5 : 6 lapins et 0 poules
27. P : pas de 0poules

P écrit les propositions au tableau

$2^{ème}$ cas

| L | p |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |
| 1 | 5 |
| 2 | 4 |

28. P : bien maintenant vous voyez 6têtes et 16 pattes en même temps, réfléchissez
29. E2 : 6lapins et 6poules
30. P : vérifie
31. P : 2 lapins et 4poules
32. P : comment cela ? justifie

$2\times4=8$, $4\times2=8$, $8+8=16$ et $2\times2+4=8$

33. p : oui ça vérifie les deux conditions en même temps est ce qu'il y a d'autres possibilités ?
34. E5 : 3,2 madame
35. P : combien de têtes, comment vous prenez ces possibilités ?
36. E : (en langue arabe) : commune madame
37. E0 : au hasard x puis je cherche y madame
38. P : tu passes ici à la résolution Achraf, on cherche des possibilités avec le tableau
39. E3 dans les 2 tableaux il y a 2,4 et 4,2
40. P : est-elle envisageable dans ce $3^{ème}$ cas ?
41. P : vous avez dit c'est une possibilité commune au deux cas, je veux répondre à 42.ta suggestion Farah, je la prend ou non
43. E1 : nombre de pattes 4x4=16, nombre de têtes 2x2 =4
44. P : ça fit combien ?
45. E1 : 20
46. P : je prends ou non ?
47. E1 : non
48. P écrit au tableau

$3^{ème}$ cas

| L | p |
|---|---|
| 2 | 4 |
| | |

2) Posons x le nombre de lapins et y le nombre de poules

E0 : $x+y = 16$

49. P : prenons les valeurs du $1^{er}$ tableau
50. E3: madame $2x+4y=16$, pourquoi $2x$ ?
51.E4 : non madame 4x
52.E3 : $2\times4 = 8$

53.P: tu as dit tout à l'heure 4x
54. E3 : non madame x est le nombre de lapins
55. P : que représente le nombre 4x
56. E5 : le nombre de lapin
57. P bien donc 4x est le nombre de lapins et y est le nombre de poules
58. P : quel est le nombre de poules ?
59. E : y
60. P : quel est le nombre de pattes de poules ?
61.E : 2y madame
62. P : la mise en équation alors ?
63. P écrit au tableau Le nombre total de pattes est 16 donc
64. P : qu'est ce que j'écris ?
65.4x +2y = 16 donc on vient de mettre le problème dans le 1er cas en équations c'est une...
66. E : équation du premier degré à deux inconnues
67. P : vérifions les résultats du 1er tableau
68. E : 4x2 +2x4 =16, , 4x1+2x6 = 16 , 4x3 +2x2= 16
69. P: voyons le 2ème cas Si x est le nombre de lapins, je reprends, quel est le nombre de lapins ?
70. E : x et $x\times1 = x$
71. Et y le nombre de poules, chaque poule possède ?
72. E : 1 tête donc $y\times1 = y$
73. P : l'équation est...
74. E : $x + y = 6$
75. P : 3éme cas, vous avez à la fois 16 pattes, 6têtes
76. E0 : $x + y = 4x + 2y = 16$
77. P : tu as apte à la résolution regarde , on remplit deux conditions là 4x+2y =16 et x+y=6, x et y doivent vérifier en même temps quoi ?
Un silence puis p reprend la même remarque
78.p : x et y doivent vérifier.. et montre du doigt les deux équations écrites au tableau
79.E : $4x + 2y = 16$ et $x + y = 6$
80.p : donc la donnée de deux équations en même temps , x et y étant deux inconnues vérifiant les deux équations en même temps s'appelle système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.
81. E6 : madame, on peut la rendre une seule équation ?
82. P : ça va venir...
83. P écrit au tableau : La donnée des deux équations du 1er degré à deux inconnues $4x + 2y = 16$ et $x + y = 6$ à la fois s'appelle système de deux équations du 1er degré à deux inconnues qu'on peut écrire :
$4x + 2y = 16$
$x + y = 6$
84. p : sayez, vous avez terminé ?
85. E : non...
86. P : alors retournons à la première partie, la possibilité 2,4 , le couple de réels (2,4) vérifie qu'elle équation ?
87. E0 : les deux
88. P : le couple (2,4) comme vous l'avez dit tout à l'heure est une solution commune aux deux équations, c'est donc une solution du système
P écrit au tableau :
Le couple (2,4) est solution à la fois de l'équation $4x + 2y = 16$ et de l'équation
$x + y = 6$, on dit que (2,4) est solution du système

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

89.p : alors plus généralement on donne la définition
90. E : attendez madame

P circule entre les rangs en attendant que les élèves finissent de recopier puis écrit

91. P : Plus généralement On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, la donnée de deux équations ax + by = c et a'x + b'y = c'à la fois où a,b,c,a',b',c' sont des réels tels que a et b ne sont pas nuls à la fois et a', b' ne sont pas nuls à la fois

Le système ax + by = c et a'x + b'y = c' s'écrit aussi :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

92.p : maintenant écrivez activité 2 à faire chez vous, allez rapidement

93. p dicte l'énoncé :

On dispose d'une orange et d'une pomme de masses inconnues et de deux masses marquées 200gr et 300gr et d'une balance à deux plateaux

Un premier équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, un 2ème équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre

1) mettre le problème en système de deux équations du 1er degré à deux inconnues
2) parmi les couples suivants, quels sont ceux qui vérifient le système obtenu ?

(50,300), (250,150), (125,375), (150,350)

**Observation du 7 mai 2006 de $P_2$ séance 4 de 10h à 11h**

1. P : Bien quelqu'un lis le problème que j'ai donné à faire la dernière fois.

Une élève lit l'énoncé

2. E : On dispose d'une orange et d'une pomme de masses inconnues et de deux masses marquées 200gr et 300gr et d'une balance à deux plateaux.

Un premier équilibre est réalisé, lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, un deuxième équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre

1) Mettre le problème en système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

3. P : on commence d'abord par cette question, qui a réfléchi et donne une réponse…alors j'attends…nous avons une orange et une pomme de masses inconnues et deux masses, un 1er équilibre est réalisé lorsque la pomme et l'orange sont sur un plateau et la masse de 500gr sur l'autre, ce 1er équilibre qu'est ce qu'il va nous donner ?

4. E1 : orange plus pomme égal 500gr

5. P : la masse de l'orange et la masse de la pomme est égal à 500gr, qu'est ce que l'on a donc..

6. E2 : soit la masse de la pomme x et y la masse de l'orange on fait x plus y égal 500grammes

7. P : bien, pour vous x désigne la masse de la pomme donc pour vous cette masse est ?

8. E2 : inconnue

9. P : oui, y désigne

10. E : la masse de l'orange

11. P : bien sûr tout est en grammes, donc 1er équilibre vous avez dit

12.E : x plus y égal 500

13.P : bien

14.p écrit au tableau :

x désigne la masse de la pomme

y désigne la masse de l'orange

1ér équilibre x + y = 500
2ème équilibre y + 200 = x
15. E3 : x plus 200 égal y
16.P : c'est quoi y relis le 2ème équilibre
17. E3 : un deuxième équilibre est réalisé lorsque l'orange et la masse de 200gr sont sur un plateau et la pomme sur l'autre.
18. P : la masse de combien
19. E3 : 200gr
20. P : qu'est ce que ça donnerait, relis
21. E3 relis l'énoncé
22. P : et la pomme sur l'autre donc y + 200 = x, ces deux inconnues à déterminer doivent en même temps vérifier un premier équilibre donc une 1ère équation et un 2ème équilibre donc une 2ème équation, x et y vérifient donc...
23. E4 : x+y=500 et y+200= x
24. P : donc x et y vérifient quoi ?
25. E4 : un système
26.P : quel système
27. E4 : du problème
28.P : c'est à dire quoi
29. E4 : les deux équations
30. P écrit au tableau :
x et y vérifient en même temps x + y = 500 et y + 200 = x donc le couple (x, y) vérifie le système de deux équations

$$\begin{cases} x+y=500 \\ y+200=x \end{cases}$$

31. p : donc déterminer la masse de l'orange et de la pomme revient à déterminer la solution du système, alors donnez moi la 2ème question
32. E : (50,300), (250,150), (125,375), (150,350)
33. P écrit les propositions au tableau
34. P : parmi ces couples y a-t-il un couple qui soit une solution commune de ces deux équations ?
35. E1 : deux couples
36. P : justifiez votre réponse à chaque fois ?
37. E2 : il y a 1 couple qui vérifie la 1ère
38. P : c'est quoi ?
39. E2 : (150,350) parce que 150+350=500
40. P : oui c'est vrai, est-il solution de la 2ème
41. E: oui madame, ...non madame
42.E1 : 150+200=350
43. E5 : non madame, y c'est 350 et x c'est 150
44. P : votre camarade dit 350+200=550 donc n'est pas solution du système
45. E : non...oui madame
46. P : il y a ici un ordre bien déterminé à respecter, vous avez désigné la masse de l'orange par x et celle de la pomme par y vous pouvez changer mais vous devez faire attention, bon (150,350) n'est pas solution ici et les autres couples ?
47. E : il y a (250,150)
48. P : vérifie t-il les deux équations ?
49. E3 : non parce que 250+150=400
50. P : 400 n'est pas égal à 500 donc (250,150) n'est pas solution de la 1ère, est-il solution du système ?
51. E : non madame
52. P : et le couple (125,375)
53. E4 : 125+200=325, 325 n'est pas égal à 375
54. P : vous avez suivi ?
55. E : non
56. P répète intégralement la proposition de E4
57. E : c'est fausse madame
58. P : c'est quoi y ?
59. E : 375

60. P : 375+200=575,aucun couple donc n'est solution du système
P écrit au tableau : Aucun des couples (50,300), (250,150),(125,375), (150,350) ne vérifient les deux équations du système à la fois
61. P : comment donc résoudre et trouver la solution ?
62. E2 : on remplace encore le couple
63. P : arrêtons de tâtonner, on va résoudre, bien…
64. P écrit au tableau :
Résolution du système $\begin{cases} x+y= 500 \\ y+200 =x \end{cases}$
65. p réécrit le système en faisant une nette séparation entre les deux équations et dit :
Auriez vous une idée, arrêtez d'écrire
66. E0 : on peut mettre x = y +200 ? Je mets y + 200 + y = 500
67. P : suivons l'idée de votre camarade, ça va donner le système suivant
P écrit au tableau :
$\begin{cases} y+200+y=500 \\ y+200=x \end{cases}$ équivaut à
$\begin{cases} 2y+200=500 \\ y+200=x \end{cases}$ équivaut à
$\begin{cases} 2y=300 \\ y+200=x \end{cases}$ équivaut à
$\begin{cases} y = 150 \\ x = 350 \end{cases}$
68. E2 : c'est quoi 2y +200= 500 ?
69. P : c'est quoi cette équation ?
70. E : $1^{er}$ degré à une inconnue
71. P : qu'elle est l'inconnue ?
72. E3 : y
73. E2: 2y madame
74. P: cherchons y
75. E5 : je n'ai pas compris
76. E2 : et moi aussi madame
77. P : ce n'est pas mon idée, c'est celle de votre camarade, il a dit j'ai 2équations à deux inconnues, je remarque que x= y+200, je remplace cela dans la $1^{ère}$ équation, je peux ou non ?
78. E :bouhhhhh
79. P : c'est les mêmes inconnues et on obtient 2y+200= 500 donc y = 300il suffit maintenant de remplacer y dans cette équation x+y=500 pour trouver x = 350
80. P : qu'elle est la solution du système
81.E: 350,150
82. E8: comment x=350? y c'est 300
83. P : toi tu cherches x et y vérifie si ce couple est vraiment solution de ces deux équations ?
84. E8 : 350+150=500 et ….150+200=350
85. P : j'ai déjà entendu ce couple on l'avait auparavant ?
86. E : oui, oh l'inverse
87. P : est ce le même couple ?
88. E2 : non madame
89. E3 : (375,125) est aussi solution du système
90. P : regardez ce que votre camarade dit là, (375,125) est aussi solution c'est à dire que ce système peut posséder plusieurs solutions alors vérifiez
E2 : il est solution de la $1^{ère}$ seulement 125+200=325
91. P : ce système posséderait donc une seule solution, prenez note rapidement et on passe
92. P : Cette méthode qui consiste à remplacer une inconnue en fonction de l'autre dans l'autre équation s'appelle méthode par substitution, P écrit au tableau :
La méthode qu'on vient d'utiliser pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=500 \\ y+200=x \end{cases}$$

et qui consiste à exprimer l'une des inconnues en fonction de l'autre à partir de l'une des équations puis continuer la résolution s'appelle : résolution par substitution

93 :P :résoudre le système

$$\begin{cases} 2\,x-3y+1=0 \\ -5x+y+4=0 \end{cases}$$

94.P : bien sûr en utilisant cette méthode, utilisez la plus facile des inconnues à exprimer en fonction de l'autre à partir de l'une des équations…allez suivez

95.P réécrit le système et rappelle la méthode

96. p : allez qui commence ?

97. E1 : 200 - 201

Fou rire en classe

98. P : c'est quoi 200 ?

99. E1 : $200\times 1=200$ et $200-201+1=0$

100. P : c'est vrai, pourquoi vous rigolez, votre camarade tâtonne pour chercher mais il ne répond pas à la question, et en plus ce que tu choisis là ne répond pas à la 2$^{\text{ème}}$ équation, à ce stade je n'ai plus envi de tâtonner mais d'utiliser une méthode de résolution, si tu as suivi la résolution, tu aurais eu l'idée

101. E: madame

102. P: oui

103. E3: $2x-3y+1=-5x+y-4$

104. P : oui, elle dit a=0, b=0 donc a=b, c'est vrai mais qu'est ce qu'on va obtenir ?

105. E : une équation à deux inconnues

106. P : on est donc pas sorti du problème, utilisez cette méthode, je vous aide, choisissez la 2$^{\text{ème}}$ équation, on exprime…

107. E0 : y à l'aide de x

108 : P : alors on écrit…

109. E0 : $y=5x+4$

110. P : qu'est ce qu'on va faire maintenant

111. E0 : on remplace dans la 1$^{\text{ère}}$

112. P : bien, on va remplacer et p écrit au tableau :

$$\begin{cases} 2\,x-3y+1=0 \\ -5x+y+4=0 \end{cases} \text{ équivalent à } \begin{cases} 2\,x-3y+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\,x-3(5x+4)+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$$

113.p : et après ?

114. E : on développe

115. P : d'accord

$$\begin{cases} 2\,x-15x-12+1=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$$

116.P : ensuite..

117. E5: 2x-15x-13

118. P: tu es sûre ?

119. E: -11 madame

120. P : réfléchi dorénavant alors on écrit :

$$\begin{cases} -13x-11=0 \\ y=5x+4 \end{cases}$$

120. E5 : x=13+

121. P : attend Nassim pas à pas

$$\begin{cases} -13x=11 \\ y=5x+4 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=11/-13 \\ y=5\times(-11/13)+4 \end{cases}$$

122. p : vous n'avez qu'à calculer

123. E2 : on simplifie madame

P, on réduit au même dénominateur et écrit :

$$\begin{cases} x=11/-13 \\ y=-55/13+52/13 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=11/-13 \\ y=-3/13 \end{cases}$$

124. E2 : on peut mettre 2fois 10 moins 3 fois 7 plus 1égal 0
125. P : je viens de dire, il n'est plus question de tâtonner, il faut résoudre
126. P : S = quoi ?
127.E : -11/13, -3/13
128.E1 : non
129.P: pourquoi non
130. E: il y a une faute
131. P : réfléchissez la solution du système est le couple (x,y) vérifiant les deux équations à la fois et donc S = {(-11/13,-3/13)}

**Observation du 11mai 2006 de p2, séance 5 de 10h à 11h**

1.P : allez on se tait , la leçon commence rappelons ce qu'on a fait, on a définit les séances précédentes les équations du premier degré à deux inconnues puis les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues , ensuite on a appris à mettre un problème en équations puis on a vu la méthode de résolution par substitution.
P écrit au tableau : Autres méthodes de résolution d'un système, on considère le système obtenu dans l'activité 1.
2. p: c'était quoi déjà ?
3. E : x + y = 500
4. P : non celui obtenu dans l'activité 2 regardez vos cahiers
5. E : x+y=6 , 4x+2y = 16
6. P : résolvons donc ce système par une autre manière auriez vous une idée ?
7. E1 : x+y+ 4x+2y = 16+6
8. P : tu as fait la somme ? Est ce que ça a éliminé une inconnue ?
9. E1 : on peut mettre en facteur x et y
10. P : écrivez d'abord plus simplement 4x+2y=16
P écrit au tableau

x+y=6 équivaut à x+y =6
4x+2y=16 2x+y=8

11. P : la méthode de substitution consistait à exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre
12. P : je vais exprimer y à l'aide de x , y égal quoi ?
13. E : 6 – x
14. P : faisons la mêmechose pour la 2ème
15. E0 : y = 8 – 2x
16. P : alors regardez, y c'est la même inconnue alors ?
17. E : 8 – 2x = 6 – x
18. E1 : madame une équation à deux inconnues
19. P : comment regarde bien
20. P écrit au tableau :

x+y=6 équivaut à x+y =6
4x+2y=16 2x+y=8
Équivaut à 6-x = 8-2x
y = 8 -2x
6 -8 = -2x +x équivaut à -2 = -x
y = 8 -2x y = 8 -2x
Équivaut à x = 2
y = 4

21. E : madame, je n'ai pas compris, moi aussi, rien...
22. P : je reprends, voilà ce qu'on a fait, on a exprimé y à l'aide de x dans la 1ère et j'ai fait de même pour la 2ème donc :
8 – 2x = 6 – x, jusque là vous avez compris
23. E : mmmm
24. P : alors c'est la résolution, suivez minutieusement
25. P relit ce qui est marqué au tableau (les systèmes)
27. E3 : pourquoi on a laissé y = 8 – 2x
28. P : on aurait pu aussi garder y = 6 –x, c'est pareil, remplace tu vas voir, y = 6-2 = 4

29. P : alors la méthode qu'on vient d'utiliser et qui consiste à exprimer à l'aide de x puis à égaliser s'appelle méthode par égalisation,
P écrit au tableau :
30.La méthode utilisée pour résoudre le système précédent s'appelle résolution par égalisation
Résoudre par égalisation
$2x - y + 1 = 0$
$x + y - 1 = 0$
31. E2 : S ou S dans IR madame ?
32. P : c'est vrai qu'on a pris l'habitude de résoudre des équations à une inconnue mais ici on cherche des couples (x,y) solutions, l'ensemble des solutions c'est des couples de réels.
Par exemple x + 3/2 =0 tu écris S dans IR c'est -3/2 alors qu'ici tu écris S par ce que ce sont des couples
33. E0 : on exprime y en fonction de x ou x en fonction de y
34. P : comme vous voulez ça dépend de ce qui est plus simple à faire
35. E4 : madame
36. P : oui allez-y suivez en même temps que moi
37. E4 dicte et p écrit
38.$2x -y +1 = 0$
39. E6 : non $y = -2x -1$
40. E5 : non madame c'est juste
41. P : explique
42. E7 : de l'autre coté, on aura y
43. P : bon on ajoute y des deux côtés et on obtient alors $y = 2x+1$
44. E3: $y = -x +1$
45. P: vas-y
46. E3: on a $2x +1 = -x +1$
47. P : bien écrivez
48P : $y = 2x +1$ équivaut à $2x+1 = -x + 1$ équivaut à $2x +x = 1-1 = 0$
$y = -x + 1$ $y = -x + 1$ $y = -x + 1$

49. E7: imposible madame
50. P : Pourquoi, 3x =0
51. E : possible madame
P écrit
$x = 0$
$y = 0$
Donc S = (0,1)
52.P : vous pouvez toujours vérifier si ce couple est solution , il suffit de remplacer dans les deux équations
P écrit : On considère le système
$2x - y +1 = 0$
$x +y -1 = 0$
53.P :taisez vous et suivez moi...regardez ce système de deux équations à deux inconnues $2x -y + 1 =0$ est une équation à deux inconnues, elle possède donc une infinité de couples solutions on a dit que la représentation graphique de ces solutions est une...
54. E : droite
55. P : bien, je continue $x+y -1 = 0$ possède aussi une infinité de couples solutions est la représentation graphique est aussi une droite P écrit au tableau : Soient D et D' les représentations graphiques respectives de l'ensemble des solutions de chacune des équations $2x - y +1 = 0$ et $x +y -1 = 0$ dans un repère (O, OI, OJ)
56. P : pour tracer une droite combien faut-il de points ?
57. E : deux points
58. E5 : trois points
Pendant ce temps P trace le repère au tableau
59. P : qu'elle est l'équation de la droite D,
60. E: $2x - y +1 = 0$
61. P: ou encore
62. P: $y = 2x +1$
63. E: $x = 0$

64. P : quoi ? On va faire un petit tableau pour tracer la droite D, on va calculer pour xégal1 c'est quoi y ?
65. E : 3
P écrit

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | 2 |
| y | 3 | 5 |

66. P : vous avez la les points de coordonnées (1,3) et (2,5), voyons pour D'
67. P : je prends x égal 0

| | | |
|---|---|---|
| x | 3 | 0 |
| y | -2 | 1 |

68. E1 : pourquoi 0 madame
69. P : comme ça c'est plus facile de le placer dans le repère
P écrit au tableau et trace par la suite
D= (AB) avec A(1,3) et B(2,5)
D' = (CD) avec C(3,-2) et D(0,1)
70. E5 : ils sont alignés madame
71. P : alors voilà je trace la droite (AB)
72. P : qui sont alignés ?
73. E5 : A et B madame
74. P : mais je peux toujours dire que 2 points sont alignés, par 2points ne passe qu'une seule droite, on ne parle d'alignement qu'à partie de trois points ou plus
75. P : levez vos têtes maintenant et suivez, nous venons de trouver l'intersection de D et 76.D'un point de coordonnées D (0,1) donc le point D appartient à D, le couple (0,1) est solution de l'équation $2x - y +1 = 0$ et c'est solution aussi de $x +y -1 = 0$
77. P : il vérifie les deux donc c'est la solution du système, on vient de résoudre graphiquement le système on écrira
$D \cap D' = D\ (0,1)$
Le couple (0,1) est solution du système
$2x - y +1 = 0$
$x +y -1 = 0$
78. E3 : quoi graphiquement ?
79. P : on a résolu ce système graphiquement, écrivez allez exercice à faire à la maison
80. P écrit l'énoncé au tableau
On considère les fonctions
f : IR→IR g : IR→IR h : IR→IR
x→ 2x+1 x→-x+4 x→-x+1
Soient D et D' et D'' les représentations graphiques respectives de f g et h dans un repère cartésien (O, OI, OJ)
1) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de D et D'
2) montrer que D et D'' sont parallèles
3) Déduire que D' et D'' sont sécantes
81. p : vous avez recopié ?
82. E : non madame
83. P : bon notez pour la prochaine fois les exercices 1 et 6 p237 sur double feuille

# Les évaluations proposées par P2

**Exercice 1**

Soit les deux équations de premier degré à deux inconnues:

( $E_1$ ): $5x - y + 2 = 0$ ( $E_2$ ): $x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$.

1/ Indiquer parmi les couples suivants ceux qui sont solutions de ( $E_1$ ). $(-5,5)$ ; $(-4,-8)$

2/ Trouver deux couples solutions de l'équation ( $E_2$ ).

3/ Représenter graphiquement sur un même repère cartésien ( $o, \vec{oi}, \vec{oj}$ ) les droites:

$D_1$: $5x - y + 2 = 0$ et $D_2$: $x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$.

4/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $D_1$ et $D_2$ graphiquement par le calcul.

6/ Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + y = -\sqrt{2} \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = -\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 4 \\ 3x^2 + 5y^2 - 1 = 28 \end{cases}$$

**EXERCICE 2**

Soit $\Delta$ une droite munie d'un repère ( $o, \vec{oi}$ ). Soit A et B les points de $\Delta$ d'abscisses respectives (-2) et (3).

1) Soit G le point de $\Delta$ vérifiant $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 0$. Trouver l'abscisse de G puis pl G.
2) Soit M le point de $\Delta$ d'abscisse négative tel que $2BM = 3BG$. Trouver l'absc de M.
3) Déterminer les abscisses des points O, A, B et G selon le repère ( $0, \overrightarrow{BM}$ )

**EXERCICE 3**

Soit $R = ( O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ} )$ un repère orthonormé du plan.

1) Placer les points $A(2, -1)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 1)$ et $K( \frac{15}{2}, 5)$ dans le repère R.
2) Montrer A, B et C sont non alignés.
3) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogram
4) Déterminer les coordonnées du point L milieu du segment $[AB]$.
5) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
6) En déduire que les droites ( BC ) et ( LK ) sont parallèles.
7) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   a. Montrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
   b. Déterminer les coordonnées du point G.

## – Devoir de Contrôle n° 3 –

**Exercice n° 1 :** (12 points)

Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -2x+5$.

1°) Construire $\Delta$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit $g$ une fonction affine dont la représentation graphique est la droite $(BC)$ tels que $B(1;0)$ et $C(3;-1)$.

a) Tracer la droite $(BC)$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Montrer que $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3°) Soit l'équation $(E)$ : $-2x - y + 5 = 0$.

a) Parmi les couples suivants indiquer ceux qui sont solution de $(E)$ : $(1;-3)$, $(0;5)$ et $(2;1)$.

b) Calculer le réel $n$ pour que le couple $(\frac{11}{2}, n)$ soit solution de $(E)$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, graphiquement puis par le calcul le système ;

$$S : \begin{cases} -2x - y + 5 = 0 \\ -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

**Exercice n° 2 :** (8 points)

1°) a – Dans le même repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, placer les points $A(2;0)$, $C(-\frac{3}{2};0)$, $E(-\frac{5}{2};3)$ et $B$ tel que $\vec{OB} = -3 \cdot \vec{OJ}$

b – Calculer les distances $AB$, $BC$ et $AC$ puis montrer que $ABC$ est un triangle rectangle.

2°) a – Calculer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{EC}$.

b – En déduire que $ABCE$ est un rectangle.

3°) a – Calculer les composantes du point $H$ tel que $ABHC$ est un parallélogramme.

b – Montrer alors que $C$ est le milieu du segment $[HE]$

Bon Travail

# DEVOIR DE SYNTHESE N°3

## Exercice N°1(8Pts)

Soit dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points $A(3,3)$ , $B(-2,-2)$ et $C(-4,0)$ .

1°) Placer les points A ,B et C

2°) Calculer les distances AB , AC et BC .

3°) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B

4°) Soit E le milieu de segment $[AC]$

a- Calculer les coordonnées de E

b- Calculer les coordonnées de vecteur [illegible] .

c- Calculer les coordonnées du point G centre de gravité de triangle ABC .

5°) On considère le point $H(-4,-2)$

a- Construire les points A' ,B' et C' images respectifs des points A,B,et C par le quart de tour direct de centre H .

b- Montrer que le triangle A'B'C' est rectangle en B' .

6°) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre B et de rayon 2 .

a- Construire le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par le quart de tour direct de centre H .

b- Montrer que le point H appartient à $\mathscr{C}'$ .

## Exercice N°2(6Pts)

1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-1$.

a- Calculer l'image de 1 par f .

b- Construire la représentation graphique $\Delta$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

2°) On l'ensemble $\Delta' = \{M(x,y); 2x+y-4=0\}$

a- Indiquer parmi les points suivants ceux qui appartiennent à $\Delta'$ : $M(1,2)$ ,$B(2,0)$ ,$C(5,4)$.

b- Tracer alors l'ensemble $\Delta'$

3°) Résoudre graphiquement le système S et par le calcule le système S' qui sont définies par

$S\begin{cases}3x-y-1=0\\2x+y-4=0\end{cases}$ et $S'\begin{cases}3x-2y-6=0\\2x+3y+9=0\end{cases}$

## Exercice N° 3(6Pts)

Avant le match l'entraîneur mesure le poids des vingt joueurs qui vont participer

Le tableau ci-dessous résume la distribution des joueurs suivant leur poids

| Poids (kg) | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 5 | 9 | 2 | 1 |
| Effectifs cumulés croissent | | | | | |
| Fréquences | | | | | |
| Fréquences cumulées croissent | | | | | |

1°) Compléter le tableau (Effectifs cumulés croissent, fréquences, fréquences cumulées croissent)

2°) Représenter la courbe des fréquences cumulées croissent.

3°) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série .

4°) Déterminer la médiane de cette série .

BONNE CHANCE

**Excercice 1**

Soient les équations du premier degré à deux inconnues.

$(E_1)$ : $3x-6=0$. $(E_2)$ : $-x+y-4=0$ $(E_3)$: $x+\frac{1}{2}y-5=0$.

1/a/Trouver les réels a et b tels que les couples $(a, 4)$ et $(\frac{1}{2}, b)$ soient solutions de l'équation $(E_2)$

b/Trouver deux couples solutions pour l'équation $(E_1)$.

2/ Représenter graphiquement dans un même repère cartésien $(o, \vec{oi}, \vec{oj})$ les droites :

$D_1$: $3x-6=0$ $D_2$: $-x+y-4=0$ $D_3$: $x+\frac{1}{2}y-5=0$

3/En déduire graphiquement la solution du système:

$\begin{cases} 3x-6=0 \\ -x+y-4=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x-6=0 \\ x+\frac{1}{2}y-5=0 \end{cases}$

4/ Déterminer le réel m pour que le point M $(m-3, 2m+5)$ appartienne à $D_2$.

5/Déterminer les cordonnées du point A, intersection de $D_2$ et $D_3$, graphiquement et par le calcul.

6/ Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

$(S)\begin{cases} 2x-y=4, \\ x-\frac{1}{2}y=3. \end{cases}$ $(S)\begin{cases} 5x-3y=1, \\ -2x+y=-1. \end{cases}$

**EXERCICE 2**

Soit $\Delta$ une droite munie d'un repère cartésien $(o, \vec{oi})$.

1. Placer sur $\Delta$ les points A, B et C tels que. $x_A=-2$; $\overline{OB}=3\overline{OI}$; $BC=2$.
2. Calculer l'abscisse du point E milieu de $[AB]$.
3. Calculer $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$, en déduire l'abscisse du point E selon le repère $(B, \overrightarrow{BC})$.
4. Déterminer l'abscisse du point F de $\Delta$ telle que. $\overrightarrow{FA}-2\overrightarrow{FB}+3\overrightarrow{FC}=\vec{0}$.
5. Déterminer les abscisses des points M de $\Delta$ telles que: $BM=2$.
6. Déterminer les abscisses des points N de $\Delta$ telles que: $AN=4$.

**EXERCICE 3**

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère cartésien du plan.

1. Placer les points: A $(-2, 1)$; B $(1, 2)$; C $(1, -3)$
2. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
3. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment$[BC]$.
4. Calculer les coordonnées du point D pour que ABDC soit un parallélogramme.
5. Le point O est-il le centre de gravité du triangle ABC ?
6. Déterminer les coordonnées du point C' image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**Bon travail**

# Fiche de préparation de P3

Chapitre N°6 — Systèmes de deux équations à deux inconnues

I Equation du 1er degré à deux inconnues

Définition :

L'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, $x$ et $y$ sont deux inconnues est appelée **équation du 1er degré à deux inconnues**.

$(a,b) \neq (0,0)$ sig $a \neq 0$ $\boxed{ou}$ $b \neq 0$

$(a,b) = (0,0)$ sig $a = 0$ $\boxed{et}$ $b = 0$.

1/ $x$ et $y$ des nombres qui appartiennent au chacque face.

a/ Relation entre $x$ et $y$ pour que la somme soit égale à 6.

$x + y = 6$ $x \in \mathbb{N}$ $y \in \mathbb{N}$

$1 \leq x \leq 6$ $1 \leq y \leq 6$.

b/ Les couples possibles.

$(1,5)$ ; $(2,4)$ ; $(3,3)$

$(5,1)$ ; $(4,2)$

2/ a/ Relation entre $x$ et $y$ pour que la somme soit égale à 10.

$x + y = 10$ $x \in \mathbb{N}$ $y \in \mathbb{N}$

$1 \leq x \leq 6$ $1 \leq y \leq 6$.

b/ Les couples possibles.

$(4,6)$ ; $(6,4)$ ; $(5,5)$.

On désigne par :

$x$ nombre de cassettes achetées ; le prix d'une cassette est 2,5 DT

$y$ nombre des CD achetés ; le prix d'un CD est 15 DT

1/ $\boxed{2,5x + 15y = 100}$

2/ on suppose que Amine a acheté 4 cassettes $x = 4$.

chercher $y$ ?

$2,5x + 15y = 100$ sig $2,5 \times 4 + 15y = 100$

sig $10 + 15y = 100$

sig $15y = 90$ sig $y = \frac{90}{15} = 6$ CD.

Le couple $(4,6)$ vérifie l'équation : $2,5 \times 4 + 15 \times 6 = 100$.

3/ on suppose que le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD.

$x = 2y$.

chercher $x$ et $y$.

$2,5x + 15y = 100$ sig $2,5 \times 2y + 15y = 100$

sig $5y + 15y = 100$

sig $20y = 100$ sig $y = \frac{100}{20} = 5$ CD

$x = 2y = 2 \times 5 = 10$ cassettes.

4/ on suppose que le nombre de CD est égale à une fois et demi de celui des cassettes.

$y = 1,5x$.

chercher $x$ et $y$.

$2,5x + 15y = 100$ sig $2,5x + 15 \times 1,5x = 100$

sig $2,5x + 22,5x = 100$

sig $25x = 100$

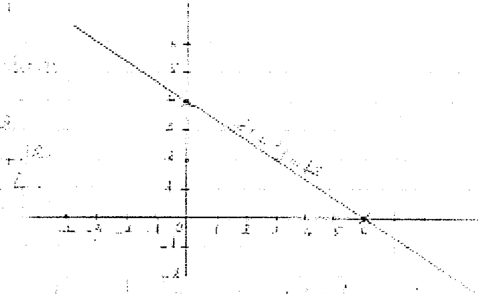
sig $x = \frac{100}{25} = 4$ cassettes.

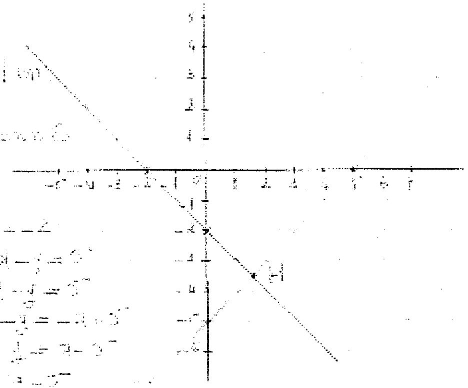
$y = 1,5x = 1,5 \times 4 = 6$ C.D.

Le couple $(4,6)$ vérifie l'équation $2,5x + 15y = 100$ avec $y = 1,5x$.

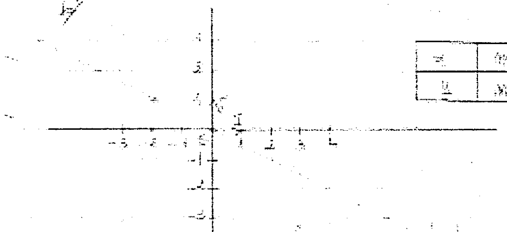
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation.

$2x + 3y = 12$.





3/ Le couple $(\frac{5}{2} ; 11)$ répond à ce problème
$-2 \times 11 = -22 \neq \frac{5}{2}$
donc le couple $(\frac{5}{2} ; 11)$ ne répond pas au problème
4/ On suppose que $x = 3$. Trouvons $m$ :
on a $m = -2x$
donc $m = -2 \times 3 = -6$.
$m = -6$.
5/ a/ $(0,0)$ ; $(-8, ?)$ ; $(-100, 50)$ ; $(-4, 2)$ ; $(-6, 3)$.
b/



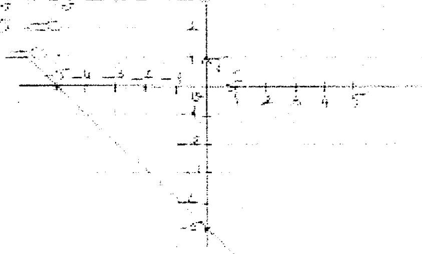
| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $m$ | $-2$ | $0$ |
| $y$ | $m$ | $1$ | $0$ |

On remarque que la représentation graphique des points de coordonnées $(m, n)$ est une droite qui passe par l'origine.

[illegible]
Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 4 est égal au triple de leur somme augmenté de 2.

$2(x+y) - 4 = 3(x+y) + 2$.
$\Leftrightarrow 2x + 2y - 4 = 3x + 3y + 2$
$\Leftrightarrow 2x - 3x + 2y - 3y - 4 - 2 = 0$
$\Leftrightarrow -x - y - 6 = 0$
$\Leftrightarrow x + y + 6 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $-6$ |
| $y$ | $-6$ | $0$ |



Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.
a/ $x - y = 2$  b/ $2x - y = 5$  c/ $x = 2$  d/ $y - 1 = 0$.

ABCD un rectangle [illegible] AB [illegible] de longueur et 3 cm [illegible] le double de celui de ABCD.
a/ Trouver une relation entre les dimensions du rectangle
b/ Représenter graphiquement les solutions de ce problème.

On donne deux équations
(I) $x + 2y - 1 = 0$
(II) $-2x + y - \frac{1}{2} = 0$
1/ Trouver les réels $m$ et $n$ tels que les couples $(m, 2)$ et $(4, n)$ soient solutions de l'équation (I)
2/ Trouver les réels $a$ et $b$ tels que les couples $(-5 ; a)$ ; $(b ; 4)$ solutions de l'équation (II)
3/ Dans un repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ tracer $D_1$ et $D_2$ représentations graphiques des solutions des équations (I) et (II)
4/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $D_1$ et $D_2$.

[illegible]

Résolution d'un système d'équations à deux inconnues du 1er degré.
A/ Résolution Graphique.
[illegible] $(a, b) \neq (0,0)$ ; $(a', b') \neq (0,0)$ et $c'$ des réels.
(S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Pour résoudre graphiquement un système revient à chercher l'intersection de deux droites $\Delta : ax + by + c = 0$ et $\Delta' : a'x + b'y + c' = 0$.

Pour cela on trace $\Delta$ et $\Delta'$ et on lit sur le graphique les coordonnées du point commun aux deux droites et c'est l'ensemble des solutions.

**Exemple :** Résoudre graphiquement $(S) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Soit $\Delta_1 : x + y = 3$

$\Delta_2 : x - y = 5$

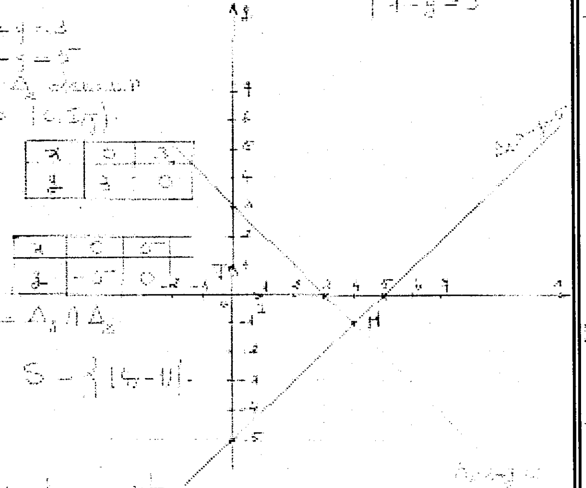
Traçons $\Delta_1$ et $\Delta_2$ dans un même repère $(O, I, J)$.

$\Delta_1 : x + y = 3$

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 0 |

$\Delta_2 : x - y = 5$

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $y$ | $-5$ | 0 |




Soit $\{M\} = \Delta_1 \cap \Delta_2$

$M(4, -1)$.

Par suite $S = \{(4, -1)\}$.

Résoudre graphiquement

$(S_1) \begin{cases} y - x = -1 \\ y - x = 3 \end{cases}$ $(S_2) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ -4x - 10y = -6 \end{cases}$ $(S_3) \begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ 4x - 10y - 3 = 0 \end{cases}$

Exp 2 : Soit $\Delta_1 : 2x - 5y + 1 = 0$

$\Delta_2 : 4x - 10y - 3 = 0$

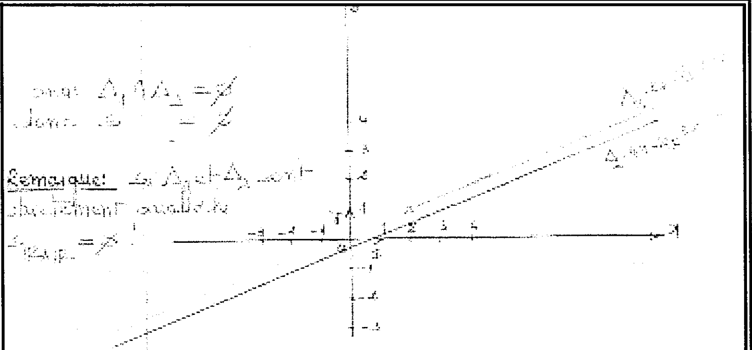
Traçons $\Delta_1$ et $\Delta_2$ dans un même repère $(O, I, J)$.

$\Delta_1 : 2x - 5y + 1 = 0$

| $x$ | 2 | $-1/2$ |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 |

$\Delta_2 : 4x - 10y - 3 = 0$

| $x$ | 2 | $-1/2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $1/2$ | $-1/2$ |



Donc $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$

donc $S = \emptyset$

**Remarque :** $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont strictement parallèles

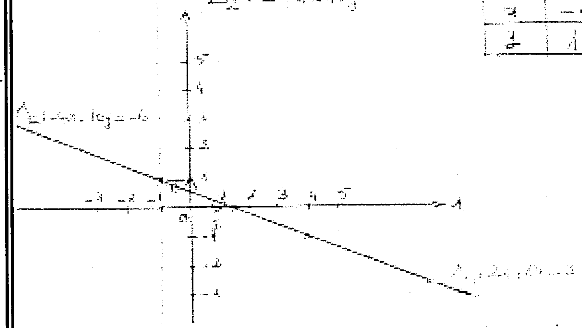
$S_{(\mathbb{R}^2)} = \emptyset$ !

Exp 3 : Soit $\Delta_1 : 2x + 5y = 3$

$\Delta_2 : -4x - 10y = -6$

| $x$ | 4 | $3/2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | 0 |

| $x$ | $-1$ | $3/2$ |
|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0 |



$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta_1 = \Delta_2$ ; $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont confondues.

Ainsi $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{M(x, y)$ tel que $M$ sur $\Delta_1\}$

$= \{M(x, y)$ tel que $M$ sur $\Delta_2\}$.

Donc $S = \{(x, y)$ tel que $2x + 5y = 3\}$

$= \{(x, y)$ tel que $-4x - 10y = -6\}$.

$2x+5y=3 \Leftrightarrow 2x=-5y+3 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}$

$-4x-10y=-6 \Leftrightarrow -4x=10y-6 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{4}y+\frac{6}{4}$

par suite $S=\{(-\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}; y) / y\in\mathbb{R}\}$

Rq : on dit que les équations $2x+5y=3$ et $-4x-10y=-6$ sont des équations équivalentes

**Conclusions**

pour la résolution d'un tel système revient à étudier l'intersection de deux droites.

① si les deux droites sont strictement parallèles aucune solution $S=\emptyset$

② si les deux droites sont sécantes une seule solution

③ si les deux droites sont confondues, c'est toute la droite.

**B/ Résolution par calcul.**

1/ Méthode de substitution.

Exemple $(\Sigma)\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=7 \end{cases}$

dans la première équation on a : $x=3-y$

on remplace $x$ dans la deuxième équation

on obtient $3-y+2y=7$.

$\Leftrightarrow y+3-7=0 \Leftrightarrow y+2=0$

$\Leftrightarrow y=-2$

par suite $x=3-y=3-(-2)=3+2=11$

d'où $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(11,-4)\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants par la méthode de substitution.

$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x-4y=0 \\ 3x+2y+15=0 \end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases} 2x-3y=1 \\ \frac{2x-2}{3}=2y \end{cases}$

2/ Méthode par élimination.

Exemple :

$(\Sigma)\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 5x-3y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\times & 2x+y-1=0 \\ 2\times & 5x-3y+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x+5y-5=0 \\ 10x+6y-4=0 \end{cases}$

on soustrait membre à membre

on trouve : $11y-9=0 \Leftrightarrow y=\frac{9}{11}$

pour trouver $x$ on remplace $y$ dans l'équation (1)

on obtient $2x+\frac{9}{11}-1=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{11}$

$S=\{(\frac{1}{11},\frac{9}{11})\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants par la méthode de l'élimination.

$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x-6y-5=0 \end{cases}$ $(\Sigma_3)\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-10 \end{cases}$

App 2 $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x-6y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\times & 2x-3y+1=0 \\ \times & 4x-6y-5=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x+6y-2=0 \\ 4x-6y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0y-7=0 \text{ imp.} \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

donc $S_2=\emptyset$.

App 3 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times & 2x+3y=5 \\ \times & -4x-6y=-10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=10 \\ -4x-6y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+0y=0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

par suite $S=\{(x,y) \text{ tel que } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \text{ et } 2x+3y=5\}$

$2x+3y=5$ $S=\{(-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}; y) / y\in\mathbb{R}\}$

$2x=-3y+5$

$x=-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}$ $S=\{(x,\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x) / x\in\mathbb{R}\}$ $2x+3y=5$ ; $3y=5-2x$

Solution sous la forme de [illegible] $y=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x$

## Séance d'observation de p3 : 7/03/2007 (2h) Séance n°1

1. P : vous mettez nouveau chapitre « système de deux équations du premier degré à deux inconnues »
p écrit le titre au tableau
I - Equation du premier degré à deux inconnues
2. P : vous prenez l'activité 1 p 233, allez faites vite, je vous laisse le temps de la faire.
3. E : je lis madame ?
4. P : d'abord il faut comprendre le problème, ensuite on corrigera.
5. E1 : c'est quoi équilibré madame
6. P : ça veut dire des dés identiques, qui ne sont pas truqués, les dés que vous connaissez
7. L'enseignant consacre à peu prés 10 minutes aux élèves pour travailler individuellement sur 8.l'activité, pendant ce temps, il circule pour voir leur travail.
9. P : bon allez on commence, est ce que vous avez compris de quoi il s'agit
10. E : oui madame, madame…
11. P : On cherche à écrire la relation entre x et y sachant que leur somme est 6, que représente x et y
12. E2 : les inconnues
13. P : oui mais pour le problème
14. E3 : ce qu'on obtient sur chaque face du dé
15. P : et qu'est ce que ça doit vérifier ?
16. E : la somme égale 6
17. P : si on traduit mathématiquement, ça veut dire
18. E2 : x plus y égal 6
19. P : très bien qui passe au tableau ?
20. E2 : madame
21. P : oui salwa

Salwa écrit seule au tableau, alors que l'enseignant lit la suite de l'activité
La relation entre x et y est $x + y = 6$
22. P : tu ajoutes au début que x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face et tu écris la relation entre …
23. L'élève rajoute et écrit :
x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face,la relation entre x et y pour que la somme soit égale à 6 est :
$x + y = 6$
25. P : bien, maintenant on cherche à compter tous les couples (x, y), comment on peut faire ?
26. E : directement des valeurs madame
27. P : et si on veut organiser l'écriture on peut faire…
28. E : un tableau
29. P : oui, salwa trace un tableau avec x et y
30. E : on peut mettre x de jusqu'à 6
Salwa fait le tableau et le remplit avec la collaboration des élèves

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

31. P : on va écrire ces résultats sous forme de couples va-y Salwa
Salwa écrit (1,5) ; (2,4) ; (3,3) ; (4,2) ; (5,1)
32. p : bon on passe à la $2^{ème}$ question qui passe au tableau
33. E : madame
34. P : oui Aymen, qu'est ce que tu écris pour exprimer la phrase
35. E : x plus y égale 10
36. P : bien tu l'écris
37. Aymen écrit :
x et y sont les nombres qui apparaissent sur chaque face,
La relation entre x et y pour que la somme soit égale à 10 est :
$x + y = 10$

38. P : ensuite il faut chercher aussi les couples qui vérifient cette relation
39. E1 : on fait aussi un tableau madame jusqu'à 6
40. P : bon on va voir
Aymen trace le tableau et le remplit avec les élèves
41.E : pour 1,2,3 c'est impossible madame
42.P : oui les faces des dés ne dépassent pas 6

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | |

43. P : donc vous écrivez les couples, il y en a combien ?
44. E : trois
45. P : tu les écris au tableau Aymen les couples possibles sont
Aymen écrit (4,6) ; (5,5) ; (6,4)
46.P : bon maintenant on va écrire la définition, les relations qu'on a trouvé sont des équations à deux inconnues et chercher les solutions c'est-à-dire trouver tous les couples qui vérifient l'équation. L'enseignante écrit au tableau

**Définition :**
L'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, x et y sont deux inconnues est appelée équation du premier degré à deux inconnues.

**Remarque :**
$(a,b) = (0,0)$ sig a=0 et b=0
$(a,b) \neq (0,0)$ sig a= 0 ou b= 0

47.P : vite on passe à l'activité 2 , attention vous lisez et vous essayez de comprendre la situation, 10 minutes environ sont laissées aux élèves qui travaillent individuellement mais qui discutent entre-eux , l'enseignante tourne dans les rangs et observe leur travail
48. P : bon on doit commencer après je vous laisserai le temps de finir, est ce que le problème est clair ?
49. E : la 3 ème question madame..
50. P : on verra ça après d'abord on va comprendre la situation, qu'est ce qu'on ne connait pas dans le problème
51. E : le nombre de cassettes et le nombre de CD
52. P : oui ce sont donc..
53. E : les inconnues
54. P : très bien, qu'est ce qu'on fait ?
55. E : soient x et y …
56. P : très bien, maintenant il faut modéliser le problème par une équation du premier degré à deux inconnues
57. E3 : $2,5x + 15\,y = 100$
58. P : oui pourquoi ?
59. E2 : 100 dinars c'est la somme pour acheter et le prix d'une cassette..
60. P : bien donc c'est clair pour tout le monde
61. E : oui madame je passe
62. P fait passer une élève au tableau qui écrit seule :
Choix des inconnues : soient x le nombre de cassettes et y le nombre de CD
Mise en équation : le prix d'une cassette est 2,5 D et le prix d'un CD est 15 D
Donc : $2,5x + 15y = 100$
63. P : bien, on obtient quoi ?
64. E : une équation du premier degré à deux inconnues
65. P : la 2$^{ème}$ question (p lit l'énoncé) on veut comprendre ça mathématiquement comment ?
66. E4 : x égale 4 donc on cherche y
67. P : bien tu passes au tableau
68. E4 passe et fait seul la tâche, les élèves anticipent sur la réponse
69. P : $2,5\,x(4) + 15\,y = 100$
Sig $10 + 15\,y = 100$
Sig $15y = 100\text{-}10 = 90$

Sig y = 90/15 = 6
70. P écrit le couple (4,6) vérifie l'équation 2,5 x 4 + 15x 6 = 100
71. P: La 3ème question, on suppose que.....(il lit l'énoncé) vous avez compris la situation ?
72. E : bouhaaa
73. P : On va comprendre la situation par étapes, le nombre de cassettes achetées est le double de celui des CD (il écrit au tableau et souligne le mot double) ça veut dire quoi double mathématiquement..
74. E : x égal 2y
75. P : très bien , alors qu'est ce qu'on fait ?
76. E : bouhaaa
77. E3 : on ne connaît pas ni x ni y
78. P : oui mais on sait que x s'écrit en fonction de y donc..
79. P : On remplace dans l'équation et on cherche y
80. E1 : mais la solution c'est un couple, pas un nombre
81. P : oui mais si on connaît y, on connaît x et on a bien un couple, on ne vous demande pas de l'écrire mais de chercher x et y, allez qui passe le faire, samia
Samia passe au tableau et écrit, les élèves participent à la tâche
x = 2y donc
2,5 (2y) + 15y = 100
5y + 15 y = 100
20y = 100
y = 4
D'après x = 2y on a x= 8
82.P: très bien allez faites vite la dernière question, c'est pareil mais attention à l'ordre..
83. E : y égale 1,5 x
84. P : oui bon vite au tableau
L'élève passe au tableau et écrit :
Y = 1,5x donc
2,5 x + 15(1,5x) = 100
25x = 100
x = 100/25
x = 4
D'après y = 1,5x = 6
85. P : Bien avant de faire l'activité 3 , vous faites les exercices suivants :

**Exercice**

Ecrire y en fonction de x dans chacun des cas suivants :
x+y = -2 ; y –x = 2 ; 2x –y = 3 ; 3x – 2y = 12 .
86. E : madame, madame,
87. P: oui vous allez passer un par un alors naoufel
x+y = -2 sig y = -2 –x
88.P: bien Imène
Iméne écrit
y –x = 2 sig y = 2+x
89.p : tu termines les autres , vite
2x –y = 3 sig y = 2x – 3
3x -2y = 12 sig y = 3/2 x – 6
90.p: bon l'exercice 2 , rapidement, vous écrivez

**Exercice:**

Soit $\Delta_1$ : x+y = -2 et $\Delta_2$: x –y = 5
1) Tracez $\Delta_1$ et $\Delta_2$ dans le même repère (o, I, J)
2) $\Delta_1$ et $\Delta_2$ se coupent en M, calculer les coordonnées de M.
91. E : je passe madame
92. P : oui Amel au tableau, qu'est ce qu'on fait pour tracer les droites
93. E : un tableau madame, deux points
94. P : oui il suffit d'avoir deux couples pour tracer la droite
Amel fait les tableaux :

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | -2 |
| y | -2 | 0 |

| x | 0 | 5 |
|---|---|---|
| y | -5 | 0 |

95. P : oui vite le repère :
Amel trace les droites et marque le point d'intersection
96. P : bon qui passe pour la $2^{ème}$ question
97. E : madame, on ne voit pas bien les coordonnées,
98. P : il faut les trouver par le calcul, regardez (il écrit au tableau):
M(x,y) vérifie x + y = -2 et x – y = 5 donc y = -x-2 et y = x – 5
D'où -x-2 = x – 5 sig –x-x = 2-5
-2x = -3
sig x = 3/2
Par suite x+ y = -2 sig 3/2 + y = -2
y = -3/2 -2
-3/2 – 4/2 = 7/2
Donc M (3/2, -7/2)
99. P: c'est clair?
100. E : bouhaaaa
101. P : on va encore voir ça dans l'activité 3 du manuel et dans d'autres exercices
102. P : bon vous faites l'activité 3 allez vite (il laisse à peu prés 7mn aux élèves pour entreprendre l'activité3).
103. P : vous avez terminé ?
104. E : pas encore madame.
105. P : mais on va commencer, on va d'abord comprendre le problème, deux nombres m et n sont tels que le tiers de leur différence est égal à leur somme, comment on traduit ça mathématiquement.( l'enseignante souligne les termes : tiers, différence, somme)
106. E : un tiers m moins n égal m plus n.
107. P : très bien qui l'écrit au tableau, Nadia tu passes ?
Nadia passe écrire l'équation
1/3 m – n = m +n
108. P : c'est correct ?
109. E : non madame, il manque les parenthèses
110. P : regarde bien, on te dit un tiers de la différence, comme ça c'est un tiers de m seulement
Nadia rectifie l'écriture 1/3( m – n) =( m +n)
111. P : bon on vous demande une valeur du couple (m,n), comment on fait ?
112. E : On prend des valeurs
113. P : comment on va les choisir ?
114. E : On peut simplifier l'écriture
115. P : oui on peut se ramener à la forme a x + by +c = 0
Nadia continue
1/3(m – n) -(m +n)= 0
1/3m -1/3n –m –n =0
1/3 m-m -1/3 n –n = 0
1/3 m -3/3 m-1/3 n-3/3 n=0
-2/3 m – 4/3 n = 0
116. P: on peut continuer, on multiplie par trois
Nadia écrit
-2m -4n = 0
117. P : plus simplement
Nadia écrit
2m+4n = 0 sig m+2n = 0
118. P : bon donnez moi quelques couples
119. E : (0, 0), (2,-1), (-1,2)
120. P : attention comment (1,2) ?
121. E : faux madame
122. P : bon vous pouvez donner plusieurs couples on prendra cinq dans la question d'après, alors la suite
123. E2 : madame, je passe ?

124. P : oui, le couple (3/5,11) répond-il au problème ?qu'est ce qu'on fait ?
125. E2 : on remplace madame (il écrit au tableau)
3/5 + 2x11 = 0 sig 114/5 = 0 impossible
126. p : oui donc ce couple ne vérifie pas l'équation, ce n'est donc pas…
127. E : une solution
128. P : maintenant, on suppose que n égal trois, cherchez m
129. E : madame, je passe
130. P : oui asma
Asma passe et accomplit seule la tâche :
m+2n = 0
m + 2x3 = 0
m + 6 = 0
m= -6
P : bien passe maintenant à la représentation graphique des solutions de cette équation, donnez moi cinq couples
E : (0,0) ; (2,-4)
131. P : (interrompe cette intervention) tu es sur ? (il écrit au tableau) vérifie, regarde,
$2 + 2 \times (-4) = -6 \neq 0$
132. E1 : c'est (-4,2) madame
133.P : oui c'est bon …vite trois autres
134. E : (-2,1), (-6,3) , (-4,8), (-10,5)
135. P : bien j'écris ça au tableau et il faut maintenant placer ces points dans un repère, qui passe
136. E : madame
137. P fait passer un élève au tableau qui trace le repère puis les points.
138. P : qu'est ce qu'on remarque ?
139. E : alignés
140. P : très bien les points sont alignés. Vous écrivez la représentation graphique des points de coordonnées (m,n) est une droite d'équation m+2n = 0 , qui passe par l'origine, P : on généralise :La représentation graphique d'une équation du premier degré à deux inconnues est une droite.
141. P : Pour la prochaine fois vous préparez la situation p 233

**Séance d'observation de p3 du 14/04/2007 (Séance n°2)**

1. P : Est ce qu'on a terminé l'activité 3 ?
2. E : oui madame
3. P : alors on va passer à la situation du livre
4. P écrit l'énoncé du problème au tableau :

Situation page 233

Deux nombres sont tels que le double de leur somme diminué de 3 est égal au triple de leur somme augmenté de 2.

5. P : On va comprendre la situation alors mathématiquement comment cela ? , on a le choix pour prendre x , y ou m,n..
6. E : deux x plus y..
7. P : attendez le double de leur somme x+y entre parenthèses, ok, diminué de trois qu'est ce que ça veut dire ?
8. E : moins trois
9. P : d'accord maintenant le triple de quoi ?
10. E : de x plus y
11. P : oui qu'est ce que ça veut dire augmenter
12. E on ajoute deux
13. P : bon écrit donc (elle écrit l'équation au tableau)
$2(x + y) - 3 = 3(x + y) + 2$
14. P : maintenant on veut représenter l'ensemble des solutions, est ce qu'on va chercher x en fonction de y ?
15. E : non y en fonction de x

16. P : quelles sont d'abord les étapes ? L'équation du premier degré doit apparaître est ce que je peux représenter comme ça les solutions ? Est ce que c'est clair pour vous ?
17. E : non
18. P : alors il faut développer et simplifier l'écriture
P écrit au tableau et les élèves suivent et recopient en même temps sur leurs cahiers
$2x + 2y - 3 = 3x + 3y + 2$
Sig $2x - 3x + 2y - 3y - 3 - 2 = 0$
Sig $-x - y - 5 = 0$
19.P: je vous ai déjà dit q'une équation du premier degré à deux inconnues est de la forme
$ax + by + c = 0$.
20. P : si on veut maintenant représenter l'ensemble des solutions
21. E1 : on a dit la représentation graphique est une droite qui passe par l'origine
22. P : attention on a vu dans les chapitres précédents les fonctions affines et linéaires, je veux comprendre si je veux exprimer y en fonction de x
23. E2 : on a besoin de deux points
24. P : on ne m'a pas dit de revenir à la forme affine, on peut directement prendre deux points
25. P trace un tableau de valeur ou il place x et y
26. P : je vais annuler d'une part x puis je vais annuler y, vous avez le choix de prendre n'importe quel x
27. P : si x égal 1 comment je vais déterminer y ?
28. E3 : moins six
29. P : comment ça ?
30. E3 : $y = -x-5$ donc ça fait -6
31. P écrit au tableau en relisant
$-1 - y - 5 = 0$
$-6 - y = 0$
$-y = 6$
$y = -6$
32. E2: y égal 6 , x égal 1
33. P: alors je vais remplacer suivez
$-x - 1 - 5 = 0$
$-x - 6 = 0$
$x = -6$
Puis remplit le tableau

| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | -6 |
| y | -6 | 1 |

34. P : alors pour le traçage quelqu'un passe au tableau
35. E4 : madame
36. P : oui sihem au tableau
Sihem trace le repère au tableau puis place les points dont les coordonnées sont données par le tableau ci-dessus
P : alors s'il vous plait l'importance c'est le sens de la phrase, si elle n'est pas comprise vous ne pouvez pas trouvé l'équation ni tracer, il faut bien lire chaque mot de la phrase
37. P : les points dont les coordonnées sont (1,-6) attention de ne pas inverser 1 est l'abscisse et -6 est l'ordonnée pour le premier point
38. P : qu'est ce je vais faire par la suite ?
Bouhaaa…
39. P : soit $\Delta$ : $-x - y - 5 = 0$ la droite d'équation…après le traçage de la droite, elle est caractérisée par l'équation, le correcteur doit comprendre
40. E5 : madame on n'écrit pas la 1ère équation qu'on a trouvée $2(x + y) - 3 = 3(x + y) + 2$
41. P : l'équation d'une droite, l'équation du premier degré à deux inconnues est $ax + by + c = 0$, la représentation graphique des solutions de cette équation est une droite, suivant ce problème j'ai développé c'est tout

42. E5 : pour la rendre claire.
43. P : on passe vous mettez exercice
44. P écrit au tableau l'exercice suivant

Exercice

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de chacune des équations données

a) $x + y = 3$
b) $x - y = 5$
c) $x = 2$
d) $y - 1 = 0$

45. P : la nouveauté c'est le 3$^{ème}$ et 4$^{ème}$ cas
46. E : madame dans le même repère
47. P : allez on commence
48. E : une seconde madame
49. P : allez Riadh , on va faire la représentation on peut prévoir si la droite passe par l'orignie ou 50.non suivant quoi ?
51. E2 : c
52. P : c égal combien dans la 1$^{ère}$ ?
53. E2 : a = 1, b= 2 et c = 3
54. P : non -3 attention, c est non nul, la droite..
55. E : ne passe pas par l'origine
56. P : oui écrit Riadh soit $\Delta_1 : x + y = 3$

Et on fait un tableau

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 3 |
| y | 3 | 0 |

57. P : S'il vous plait attention de ne pas inverser x zéro et y trois, j'ai trouvé ça dans les devoirs

Riadh continue à tracer la droite dans le repère ainsi que les élèves.

58. Riadh : alors $x - y = 5$ est ce que c'est une équation du premier degré à deux inconnues ?

59 : E : oui

59. P : alors a b et c
60. E5 : a 1 b -1 et c -5
61. P : donc même chose le tableau , trace Riadh la droite $\Delta_2$ Riadh fais un tableau et place les points puis effectue seul le traçage de la droite

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 5 |
| y | -5 | 0 |

62. P : d alors la 3$^{ème}$ équation si x égal 2 est ce que c'est une équation du premier degré à deux inconnues ?
63. E1 : non
64. E2 : oui
65. P : si le couple est solution suivant c= 0 ou c $\neq$0
66. E: c égal0
67. E1: on a $x +0y = 2$
68. P : Bien ça veut dire
69. E1: b=0, c = 2 et a = 1
70. P: très bien
71. P écrit au tableau

$1.x + 0.y -2 = 0$

72. P : on prend quoi ?
73. E : y égal 0
74. P : pourquoi on sait que c'est une droite , ça veut dire quelque soit y quels sont les caractéristiques des points qui déterminent cette droite ?
75. E : bouhaaa
76. P : ça veut dire quoi x= 2 ? , l'abscisse est fixe, le y est ?
78. E2 : c'est variable
79. P : ça veut dire quoi ? x=2, je vais définir on a $\Delta_3 : x = 2$ , $\Delta_3$ est la droite qui passe par le point de coordonnées (2,0) et parallèle à l'axe des ordonnées bon pour le cas d) on a y-1 = 0 suivez

80. P écrit au tableau 0.x+1.y – 1 = 0, la caractérisation de cette droite ?
81. E : parallèle e à l'axe des abscisses
82. E3 : fonction affine a x +by = 0
83. P : comment vous suivez quoi c'est parallèle, les fonctions affines qu'est ce qu'on a vu à ce sujet ?
84. E : bouhaaa
85. P : s'il vous plait y = ax +b qu'est ce qu'on avait différencié comme cas ?je vous rappelle

P écrit au tableau

Si a = 0 , y= b

Si b = 0 ,y = 0

Si b$\neq$ 0 , y = b

86. P :Alors y = b suivant les valeurs de b on a si b> 0 alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses et si b <0 alors la droite est aussi parallèle à l'axe des abscisses mais ainsi

Alors si $\Delta_4$ c'est la droite qui passe par les coordonnées (0,1) et qui est parallèle à l'axe des abscisses,

87. P : ça va c'est clair ?
88. E : bouhaaa
89. P : bon vous écrivez exercice
90. P écrit au tableau l'exercice suivant

<u>Exercice</u>

On donne deux équations

I) x + 3y -1 = 0

II) -2x + y -12 = 0

1) Trouver les réels m et n tels que les couples (m,2) et (4,n) soient solution de l'équation (I)
2) Trouver les réels a et b tels que les couples (-5,b) et (a,4) soient solution de (II)
3) Dans un repère (o,oi, oj) tracer $D_1$ et $D_2$ les représentations graphiques solutions des équations (I) et (II)
4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $D_1$ et $D_2$

P lit l'énoncé de l'exercice, il laisse à peu prés 2 minutes aux élèves puis intervient aussitôt

91. P : allez qui passe au tableau
92. E1: madame
93. P: allez –y samia
94. E: pas encore madame
95. P: on va commencer on n'a pas beaucoup de temps, qu'est ce que ça veut dire (m, 2) vérifie l'équation y = 2 et x = m
96. E2 m plus 6 moins 1 égal 0
97. P : on me donne le couple (3,2) par exemple, on a l'équation
98. E : on remplace, Samia écrit au tableau

Le couple (m, 2) est solution de l'équation (I) sig

m+3×2 -1 = 0

m + 6 -1 = 0

m + 5 = 0

m = -5

le couple (4,n) vérifie l'équation (I) sig

4+3n -1 = 0

3 + 3n = 0

3n = -3

n = -3/3

n = -1

99. E2 : pourquoi on écrit met n et pas x et y madame
100. P : c'est l'exercice, le couple (m, 2) ça veut dire que m est l'abscisse et 2 est l'ordonnée

Si tu as le couple (2,3) tu remplaces dans l'équation x par 2 et y par 3. Dans la 2ème question je vais changer

101. E1 : pourquoi vous n'avez pas dit l'ensemble des couples (x, 2)
102. P : x peut être plusieurs choses dont m, allez la 2ème question Le couple (-5, b) vérifie l'équation (II) qu'est ce que je vais écrire s'il vous plait ?

## Séance d'observation de p3 le 21/04/2007 (Séance n° 3)

1. P : alors s'il vous plait, silence on termine l'exercice que je vous ai laissé faire, on a corrigé les question 1et 2 , la 3ème question , c'est tracer dans un repére (o,i,j) les droites D1 et D1 représentation graphiques des solutions des équations I et II , allez s'il vous plait calmez vous qui passe au tableau
2. E : madame
3. P : oui yosra au tableau
4. P : vous désignez tout d'abord les droites D1 deux points…
yosra écrit
D1 : x = -3y +1
5. P : Est-ce que la question c'est écrire x en fonction de y ou y en fonction de x pour représenter ?efface ça qu'est ce qu'on va faire ?
6. Yosra : on va représenter
7. E1 : on a déjà deux couples solution madame
8. P : si on avait pas ces couples qu'est ce que je fais ?
9. Yosra : je choisis x et..
10. P lui coupe la parole
11. P : est ce que c'est nécessaire d'exprimer x
12. E : non
13. P : alors il suffit de choisir directement quoi ?
14. E : deux points
15. Yosra rectifie et écrit au tableau
D3 : x+ 3y -1 = 0

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | |
| y | | 0 |

16. P : c'est pas nécessaire de prendre 0 regarde si x égal 0 on trouve 1/3 pour y c'est pas facile de le placer précisément dans le repère prend par exemple x égal 1 et calcul y.
Yosra écrit au tableau
Si x = 1 donc 1+3y-1=0
3y=0
y=0
17. p : bon un autre choix de x s'il vous plait on suit
18. E2:-5
Yosra écrit
-5 +3y -1 = 0
-6 = -3y
y = -6/-3 = 2
(Puis l'écrit dans un tableau)

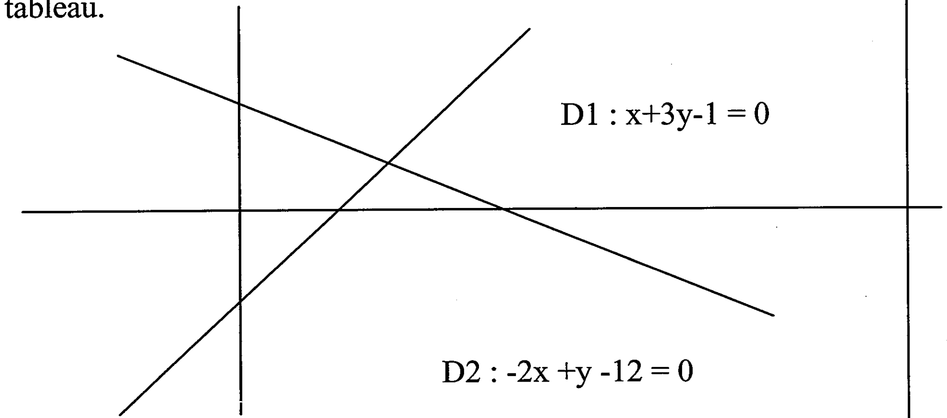
| | | |
|---|---|---|
| x | 1 | -5 |
| y | 0 | 2 |

19. P : on continue avec D2
20. E : moins 6 on trouve zéro
Yosra écrit ces valeurs puis prend x égal zéro
-2x0 + y -12 = 0
0 + y = 12
y = 12
21. E2 : c'est grand madame
22. P : il faut s'habituer à faire les calculs
23. E3 : pourquoi ne pas prendre les couples de la première question ?
24. P : j'ai dit si vous n'avez pas eu ces couples comment vous allez faire ? Ou si la valeur de m trouvée est fausse par exemple ? Bon allez vite une autre valeur de x , allez on travaille ensemble s'il vous plait

25.E : -4
Yosra écrit
-2x-4 + y -12 = 0
8 +y -12 = 0
-4 = -y

| | | |
|---|---|---|
| x | -6 | -4 |
| y | 0 | 4 |

26.P: allez y vous tracez les droites, on gradue d'abord le repère, travaillez sur vos cahiers n'attendez pas que ce soit fait au tableau.




27. P : alors D1 d'équation : x+3y-1 = 0 et D2 d'équation -2x +y -12 = 0, maintenant pour le point d'intersection
28. E : graphiquement madame ?
29. P : est ce que le point d'intersection est clair sur le graphique ou non ?
30. E : oui
31. P : p : alors si je peux lire clairement sur le graphique je réponds sinon je fais le calcul
Yosra écrit au tableau
On a d'après le graphique D1 ∩D2 = { M (-5,2) }
32. P : et par le calcul ça va à ta place yosra

P écrit
Soit M ($x_M$, $y_M$) € D1 ∩D2 (je vais expliquer encore)
Ça veut dire
M ($x_M$, $y_M$) € D1 dont l'équation est x+3y-1 = 0 et M ($x_M$, $y_M$) € D2 dont l'équation est
-2x +y -12 = 0
33. P : et après qu'est ce que je vais faire ?
34. E : on fait sortir y en fonction de x dans la 1$^{ère}$ et dans la 2$^{ème}$
35. E2 : x+3y-1 = -2x +y -12
36. P : ça veut dire quoi M ($x_M$, $y_M$) appartient à la droite d'équation x+3y-1 = 0
37. E : bouhaaaa…
38. P : qu'est que ça siginifie
39. E3 : quand on remplace on a $x_M+3y_M-1 = 0$
40. P : très bien ç'est à dire les coordonnées du point vérifient l'équation allez au tableau ramzi
Ramzi passe et p dicte
$x_M+3y_M-1 = 0$
$3y_M = -x_M + 1$
$y_M = (-x_M + 1)/3$
41. p : bon ce même point appartient à D2 alors qu'est ce que je vais faire dans la 2$^{ème}$
42. Ramzi : on détermine $y_M$
43. P : oui allez y et les autres vous avez compris ?
44. E : c'est difficile madame, pourquoi on cherche $y_M$ et pas $x_M$ ? on trouve pas un réel madame
45. P : attendez qu'on termine
46. Ramzi continue à écrire au tableau
$-2x_M +y_M -12 = 0$
$y_M = 2x_M + 12$
p : on fait quoi maintenant ?
E : l'égalité D'accord donc on a , écrit Ramzi

$(-x_M + 1)/3 = 2x_M + 12$
$-x_M/3 + 1/3 = 2x_M + 12$
$-x_M/3 - 2x_M = -1/3 + 12$
$(-x_M - 6x_M)/3 = (-1 + 36)/3$
$-7x_M/3 = 35/3$
$-7x_M = 35$
Donc $-x_M = 35/7 = 5$
$x_M = -5$
47. P : il a simplifié par quoi ? Ici ?
48. E : par 3
50. P : Bon comment je trouve $y_M$
51. E : on remplace dans l'une des équations
52. P : bien
Ramzi effectue la tâche
$y_M = 2x_M + 12$
$= 2x(-5) + 12$
$= -10 + 12$
$y_M = 2$
53. p : d'où M de coordonnées -5 2 appartient à D1 inter D2 ; Ok merci , on passe à un 2ème exercice puis on passera à la 2ème partie de la leçon systèmes de deux équations à deux inconnues .bon écrivez sur vos cahiers.

<u>Exercice3</u>

ABCD un rectangle, si on rajoute 12cm à la longueur et 7cm à la largeur alors son périmètre sera le double de celui de ABCD

a) Trouver une relation entre les dimensions du rectangle
b) Représenter graphiquement les solutions de ce problème

54. P : chacun travaille tout seul vous avez 10 minutes et je vais voir si vous avez compris la phrase.
55. P circule entre les rangs et regarde le travail des élèves.
56. P : qui a commencé ? Prenez le temps de réfléchir
5 minutes s'écoulent et p intervient
57. P : Bon allez , il faut d'abord désigner la longueur et la largeur de ABCD soit x et y ,
58. E : on ajoute 12 et 7
59. P : oui si je vais ajouter 7 à y et 12 à x qu'est ce qui se passe ? Il faut comprendre le phénomène
60. E : hahaha…
61. P : je veux dire on trouve quoi ?
62. E : un autre rectangle
63. P : oui alors son périmètre, le périmètre de qui ?
64. E1 du premier
65. E2 : du 2ème rectangle madame
66. P : attention lisez bien, le double de celui de ABCD donc c'est le 2ème rectangle, c'est très important si vous ne comprenez pas le sens de la phrase, vous ne pouvez pas continuer. Alors qu'est ce que je vais faire ? S'il vous plait suivez l'écriture mathématique, je veux l'entendre
(Les élèves proposent des formules, certaines sont erronées)
67. P : allez qu'est ce que j'écris
68. E : deux x plus 12 plus y plus 7 égal deux fois deux x plus y
P l'écrit au tableau en insistant suer la signification de 2 qui traduit le double et rappelle que la formule du périmètre du rectangle c'est deux fois la longueur plus deux fois la largeur.
69. P : est ce que c'est clair ou non ? S'il vous plait silence
70. E oui on développe madame pour résoudre
71. P : alors je vais aboutir à une équation encore c'est une relation entre les dimensions
72. E2 : si on ne dit pas tracer qu'est je fais madame ?
P ignore la question et fait passer Mourad au tableau
Mourad écrit
$2x + 24 + 2y + 14 = 4x + 4y$

2x -4x +24 +14 = 4y -2y
-2x + 38 = 2y
y = -2x/2 + 38/2 = -x + 19
y = 19 –x
73.p interrompe Mourad et interpelle les élèves,votre camarade m'a écrit
(2x + 12) + (2y +7) = 2 (2x +2y)
74. E: c'est faux madame
75. E5 : j'ai oublié madame
76. P : c'est pas ça il faut m'expliquer pourquoi tu as écris comme ça ?
78. E5 : j'ai cru qu'on ajoute 12 au double de la longueur et 7 au double de la largeur pour avoir le double périmètre
79. P : bon alors suis et fais attention
80. P revient sur ce que Mourad a écrit au tableau et pose la question aux élèves
81. P : est ce que c'est une relation entre les dimensions du rectangle ?
82. E : oui, non madame…
83. P : qu'est qu'on fait ? Est ce que c'est une relation ? et la représentation ?qu'est ce que je vais choisir ?
84. E7 : ce n'est pas une relation madame on n'a pas ax +by = c
85. P : comment x et y sont les dimensions du rectangle et l'équation qu'on a écrit est bien une relation entre x et y je ne comprends pas ta question
86. E7 : on a vu qu'une relation est une équation de la forme ax +by = c on n'a pas ça ici
87. P : si, l'équation du départ se ramène après développement à la forme qu'on a écrit, c'est pas un problème d'écrire exactement cette forme pour affirmer que c'est une équation à deux inconnues.
88. E : madame on choisit x assez grand pour faire la représentation
89. P : oui fais un petit tableau de valeur Mourad vas-y
Mourad calcule mentalement et écrit les valeurs

| | | |
|---|---|---|
| x | 9 | 11 |
| y | 10 | 8 |

90. P : c'est l'heure terminez chez vous la représentation graphique.

**<u>Séance d'observation de p3 le 24/04/2007(2h)(Séance n° 4)</u>**

1. P : On écrit système de deux équations du premier degré à deux inconnues, activité 4
2. P : je vous laisse un peu de temps pour comprendre le problème
7 minutes s'écoulent P3 reprend
3. P : bon on commence, on a R boules rouges et N boules noires, Que représentent R et N ?
5.4. E : les inconnues
6. P : bien, c'est quoi le triple de N
7. E1 : 3N madame
8. P : comment donc on traduit la phrase le triple de N est égal à R diminué de 3
9. E2: Madame 3N = R – 3
10. P: c'est correct?
11. E : oui madame
12. P : on continue, c'est quoi quadruple ?
13. E3 : 4N
14. P : donc qui traduit la deuxième phrase
15. E : madame, madame
16. P : Amel c'est quoi l'équation ?
17. A : 4N = R + 3

18. P : on écrit ça, (p3 écrit au tableau)
Soient R le nombre de boules rouges et N le nombre de boules noires
Mise en équations :
$3N = R - 3$
$4N = R + 3$
19. P : R et N vérifient en même temps ces deux équations, on dit que c'est un système de deux équations à deux inconnues. la 2$^{ème}$ question on veut trouver N et R
20. E : bouhaaaaa
21. P : regarder si on fait la différence des égalités qu'est ce qu'on trouve ?
22. E1 : 4N - 3N
23. P : oui égal quoi ?
24. E : bouhaaa
25. P : attendez on va l'écrire au tableau, (P3 écrit)
$4N - 3N = (R + 3) - (R - 3)$
26. P : c'est clair ? je continue, on trouve
$4N - 3N = R + 3 - R + 3$
$N = 3 + 3$
$N = 6$
27. P : comment on fait pour trouver R ?
28. E : la somme madame
29. P : N et R vérifient les deux équations en même temps, il suffit de remplacer N dans l'une des équations allez vous suivez :
$3 \times 6 = R - 3$
Sig $18 = R - 3$
Sig $R = 18 + 3 = 21$
30. P : bon vous écrivez définition : un système de deux équations à deux inconnues est la 31.donnée de deux équations… et résoudre untel système c'est trouver tous les couples (x, y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois . Chaque couple est appelé solution du système.
32. P : Vous écrivez après méthodes de résolutions
A/ Résolution graphique
Pour résoudre graphiquement ce système revient à étudier l'intersection de deux droites
$\Delta$: ax +by +c = 0 et $\Delta'$ : a'x +b'y +c' = 0
Pour cela tracer $\Delta$ et $\Delta'$ et lire sur le graphique les coordonnées du point commun au deux droites et écrire l'ensemble des solutions.
33. P : On passe à l'activité suivante, vous écrivez :
Activité
Résoudre graphiquement
$$S \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$
34. E : madame je passe
35. P : oui on va commence par tracer ces droites comme on a fait la dernière fois
36. E5 : on fait les tableaux et le repère
$\Delta_1$: x +y = 3

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 3 | 2 |

$\Delta_2$: x - y = 5

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | -5 | -4 |

37. P : donc quels sont les coordonnées du point d'intersection
38.E : on trouve M (4, -1)
39. P : bien c'est donc la solution du système obtenu graphiquement on va voir d'autres cas, vous écrivez (P prend la main pour écrire au tableau) :
S = {(4, -1)}

Activité
Résoudre graphiquement

$$S \begin{cases} 2x+5y=3 \\ -4x-10y=-6 \end{cases}$$

$$S' \begin{cases} 2x-5y+1=0 \\ 4x-10y-3=0 \end{cases}$$

40. P : qui passe
41. E : madame

P fait passer un volontaire au tableau qui accomplit la tâche alors que les élèves le font sur leurs cahiers :

$\Delta_1$: $2x -5 y +1 = 0$

| | | |
|---|---|---|
| x | 2 | -1/2 |
| y | 1 | 0 |

$\Delta_2$ : $4x - 10y - 3 = 0$

| | | |
|---|---|---|
| x | 2 | -3 |
| y | -1/2 | -3/2 |

42. P : Qu'est ce qu'on remarque ?
43. E : les droites sont parallèles
44. P : donc c'est quoi la solution ?
45. E : bouhhhaa
46. P : c'est quoi l'intersection des droites
47. E : il n'y a pas
48. P : donc il n'y a pas de solution c'est l'ensemble vide, bon l'autre cas maintenant, Samia tu passes écrire l'ensemble de solution et tu refais le même travail pour le système suivant

Samia écrit $S = \emptyset$

$\Delta_1$: $2x -5 y = 3$

| | | |
|---|---|---|
| x | 4 | 3/2 |
| y | -1 | 0 |

$\Delta_2$ : $-4x - 10y = -6$

| | | |
|---|---|---|
| x | -1 | 3/2 |
| y | 1 | 0 |

49. P : on obtient des droites ?
50. E2 : égale
51. P : non confondues, c'est quoi donc l'intersection ?
52. E : bouhaaa
53. P : l'intersection c'est tout simplement toute la droite
54. E1 : comment on écrit l'ensemble de solutions madame
55. P : vite vous écrivez méthodes de résolution par le calcul
56. E : Madame l'ensemble S des solutions
57. P : vous écrivez le système possède une infinité de couples solutions vérifiant les deux équations, allez

P écrit : B/ Résolution par le calcul, Activité 5

58. P : vous lisez et vous suivez les questions de l'activité
59. E : la première équation madame : m plus n égal 96 mais la deuxième
60. P : comment on traduit la deuxième phrase ?en ajoutant à chacun d'eux 78
61. E2 : m plus 78 et n plus 78
62. P : l'un devient le double de l'autre alors
63. E 3 : $m = 2n$
64. P : attention on vous dit devient après avoir ajouté 78
65. E1 : m pus 78 égal deux fois n plus 78
66. E2 : le contraire
67. P : le deux sont correctes puisqu'on dit l'un des deux
68. P écrit le système

$m + n = 96$
$m + 78 = 2(n+78)$

69. P : bien vous faites les autres questions pour résoudre ce système, regardez, on vous dit
70. p ; Exprimer m en fonction de n dans l'une des équations, par exemple la première puisque c'est la plus simple qu'est ce que vous dites ?

71. E : m égal 96 moins n
72.P : oui silence, vous suivez
P écrit au tableau

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ m + 78 = 2(n+78) \end{cases}$$

73.P: qu'est ce qu'on demande ensuite
74.E: on remplace dans l'autre équation
75.P: bon vous suivez

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ 96 - n + 78 = 2n + 156 \end{cases}$$

76.P: On obtient quoi ?
78.E: une équation madame
79.P: oui mais qu'elle équation?
80.E3: à une inconnue n
81.P: vous savez la résoudre , je continue donc
équi valent à $\begin{cases} m = 96 - n \\ 2n + n = 78 + 96 - 156 \end{cases}$
82.P: équivalent à , on calcule ça fait 18
équi valent

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ 3n = 18 \end{cases}$$

équi valent à

$$\begin{cases} m = 96 - n \\ n = 18/3 \end{cases}$$

83.E: six madame
84.P: en déduire m et n donc on remplace n dans la première équation on obtient(p écrit)
équi valent à

$$\begin{cases} n = 6 \\ m = 90 \end{cases}$$

Donc S = {(90,6)}

85. P : C'est clair ? Cette méthode s'appelle méthode de résolution par substitution, vous recopier sur vos cahiers la définition de cette méthode puis on passe à l'activité 6.
P laisse 5 minutes aux élèves le temps de recopier
86. P : bon vite activité 6 , très rapidement , je vous laisse quelques minutes.
87. E3 : madame, la première question il y a rien à faire , on nous donne le système
88. P : oui il faut juste vérifier que les équations modélisent bien la situation, qu'est ce qu'il faut faire d'abord ?
89. E : choix des inconnues
90. P : bien qui passe le faire
91. E2 : madame, x et y
92. P : tu passes et tu justifies
E2 écrit
1) choix des inconnues : soient x le prix d'un stylo et y le prix d'un cahier
2) Mise en équation, (p l'interrompe et regarde les élèves)
93. P : comment on traduit cinq cahiers et deux stylos coûtent 3300 millimes
94. E: 5x +2y = 3300
Pendant ce temps L'élève au tableau écrit les deux équations
5x +2y = 3300
3x +4y = 2400
95. P : bien Maroua a déjà écrit au tableau la 2ème mais est ce que c'est clair ou parce que vous l'avez déjà
96. E : c'est facile madame
97. P : bon donc la question d'après, on vous demande de multiplier la première par 3, sayez vous l'avez fait ?
98. E : non madame
99. P : tu retournes à ta place Maroua allez faites le
100. P : bon on prend le système vous suivez (p écrit au tableau)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ 3x + 4y = 2400 \end{cases}$$
Equivalent
$$\begin{cases} 15x + 6y = 9900 \\ -15x + -20y = -12000 \end{cases}$$
101. P : puis on fait la somme pour trouver y
102. E3 : pourquoi la somme madame
103. P : regarde tu as 15x et - 15x, ils sont opposés et ils vont disparaître en faisant la somme
104. E1 : comment on fait la somme des équations ?
105. P : vous suivez, vous allez comprendre (p continue à écrire)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ -14y = 9900 - 12000 = -2100 \end{cases}$$
106. E1 : pourquoi on la première équation
107. P : c'est pareil elles sont équivalentes, on prend la plus simple, bon on continue, Quatrièmement on vous dit remplacer y par sa valeur dans l'une des équations du système pour trouver x
P écrit et parle en même temps tandis que les élèves recopient
$$\begin{cases} 5x + 2y = 3300 \\ y == 2100 / 14 = 150 \end{cases}$$
Equivalent
$$\begin{cases} y = 150 \\ 5x + 2 \text{ x } 150 = 3300 \end{cases}$$
Equivalent
$$\begin{cases} y = 150 \\ 5x = 3300 - 300 = 3000 \end{cases}$$
Equivalent
$$\begin{cases} y = 150 \\ x = 3000 / 5 = 600 \end{cases}$$
107. P : Donc le prix d'un cahier est …
108. E : 600 millimes
109. P : et le prix d'un stylo est 150 millimes, cette méthode s'appelle résolution par élimination vous écrivez la définition qu'il y a dans le livre et vous faites chez vous l'exercice 1 en utilisant à chaque fois une méthode

**TITRE :**

D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes – Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le contexte scolaire tunisien.

**AUTEUR :**

Sonia Ben Nejma

**RESUME :**

Notre recherche s'organise autour d'une réforme du curriculum « entre des injonctions institutionnelles et la réalité des pratiques enseignantes ». Il s'agit précisément de montrer l'impact d'une réforme curriculaire, relativement à l'enseignement de l'algèbre élémentaire, sur les pratiques des enseignants dans le système d'enseignement secondaire tunisien. Nous mettons à profit les travaux existants pour aborder cette problématique en prenant deux dimensions essentielles : la dimension institutionnelle et la dimension professionnelle. L'étude de ces deux dimensions, et de leurs interrelations permettent de mettre en avant des perturbations endogènes au système institutionnel.

Dans un premier temps, nous exposons le point de vue théorique utilisé pour analyser l'activité du professeur, qui s'appuie principalement sur la Théorie Anthropologique du Didactique, tout en empruntant plus ou moins directement à d'autres approches pour étudier les routines et régulations à l'oeuvre dans ces pratiques ( Théorie de l'Action du professeur, Double Approche, Théorie des Situations ).

On partira des dimensions institutionnelles de ce travail, des nouvelles prescriptions en termes de curricula et d'organisations praxéologiques relatives à ce domaine d'étude pour le niveau de première année secondaire Tunisien.

A partir d'une analyse de cahiers « modèles » d'élèves, nous livrons ensuite certains résultats révélateurs de résistances au changement dans les pratiques d'enseignants chevronnés. Puis nous présentons une étude de cas de deux enseignantes expérimentées et d'une enseignante observées à l'occasion de leur enseignement d'algèbre.

Pour aborder la dimension professionnelle des pratiques au regard de la dimension institutionnelle, nous nous arrêterons sur les adaptations opérées par les deux enseignantes dans leurs pratiques, à l'heure où est suggéré un important déplacement topogénétique vers l'élève, l'intensification du travail en classe et l'apparition de nouvelles formes d'étude qui invitent à solliciter de nouvelles ressources ou stratégies enseignantes pour " s'adapter ". Une analyse fine de ces pratiques effectives révèle aussi bien des évolutions que des stabilités nous amenant à distinguer plusieurs adaptations à la réforme : celles en « conformité de surface » et celles en « conformité en profondeur » à une organisation praxéologique prescrite par une réforme.

**MOTS- CLES :**

Réforme – pratiques enseignantes – algèbre élémentaire – routines – régulations – perturbations endogènes et exogènes – praxéologies mathématiques et didactiques – adaptations - conformité.

**Éditeur: IREM de Paris 7**
Responsable de la publication: C. Hache
IREM de Paris 7 – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13
iremp7@math.jussieu.fr
http://iremp7.math.jussieu.fr

Dépôt légal : septembre 2009
ISBN : 978-2-86612-311-6